

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	13
Г л а в а 1. Множества. Пространства. Функции	19
§ 1.1. Функции и отображения	19
1.1.1. Предмет функционального анализа (19). 1.1.2. Множества (21). 1.1.3. Пространства (21). 1.1.4. Действия над множествами (22). 1.1.5. Общее определение функции (25). 1.1.6. Образы и прообразы множеств. Обратные отображения (28). 1.1.7. Свойства обратных отображений (29). 1.1.8. Отношение порядка (30). 1.1.9. Аксиома выбора (32).	
§ 1.2. Метрические пространства	36
1.2.1. Основные свойства пространств (36). 1.2.2. Определение метрического пространства (37). 1.2.3. Открытые и замкнутые множества. Окрестности точек (39). 1.2.4. Сходимость в метрическом пространстве (41). 1.2.5. Полные метрические пространства (41). 1.2.6. Сепарабельные метрические пространства (42). 1.2.7. Пополнение метрического пространства (43). 1.2.8. Непрерывные функции в метрических пространствах (46). Задачи (47).	
§ 1.3. Линейные пространства	48
1.3.1. Определение линейного пространства (48). 1.3.2. Линейная зависимость и независимость векторов (50). 1.3.3. Подпространства. Линейные оболочки (51). 1.3.4. Фактор-пространства (52). 1.3.5. Линейные функции (53). 1.3.6. Норма вектора (55). 1.3.7. Нормированные линейные пространства (55). 1.3.8. Банаховы пространства (56). 1.3.9. Скалярное произведение (56). 1.3.10. Евклидовы и гильбертовы пространства (60). 1.3.11. Алгебры (62). 1.3.12. Пространства непрерывных функций и пространства ограниченных функций (62). 1.3.13. Пространства дифференцируемых функций (64). Задачи (65).	
Г л а в а 2. Теория меры	67
§ 2.1. Классы множеств	67
2.1.1. Функции множества (67). 2.1.2. Полуалгебры множеств (67). 2.1.3. Алгебры множеств (68). 2.1.4. Построение полуалгебры и алгебры, порожденных данным классом множеств (70). 2.1.5. Построение σ -алгебры, порожденной данной алгеброй мно-	

жеств (73). 2.1.6. Кольца и полукольца множеств (74). 2.1.7. Монотонные классы множеств (74). 2.1.8. Произведение двух пространств (77). 2.1.9. Произведение множества пространств (78). Задачи (80).

§ 2.2. Функции множества и меры 82

2.2.1. Аддитивные функции множества (82). 2.2.2. Непрерывные функции множества (86). 2.2.3. Общие свойства мер (86). 2.2.4. Свойства неотрицательных мер (88). 2.2.5. Представление действительной числовой меры в виде разности неотрицательных мер (93). 2.2.6. Полная вариация меры (97). Задачи (100).

§ 2.3. Продолжение меры 102

2.3.1. Продолжение и сужение функции (102). 2.3.2. Задача о продолжении числовой меры (102). 2.3.3. Внешняя мера (102). 2.3.4. Класс множеств, измеримых по Лебегу (107). 2.3.5. Одно свойство класса измеримых по Лебегу множеств (112). 2.3.6. Полные σ -алгебры (112). 2.3.7. Совпадение σ -алгебры измеримых по Лебегу множеств с минимальной полной σ -алгеброй, содержащей полуалгебру $\mathcal{C}$ (113). 2.3.8. Аппроксимационное свойство алгебры, порождающей σ -алгебру (115). 2.3.9. Совпадение классов множеств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_1$ (118). 2.3.10. Общая теорема о продолжении числовой меры (119). 2.3.11. Продолжение меры по Жордану (121). Задачи (122).

Г л а в а 3. Интегралы 127

§ 3.1. Измеримые функции 127

3.1.1. Определение измеримой функции (127). 3.1.2. Свойства измеримых функций (128). 3.1.3. Простые и элементарные функции (130). 3.1.4. Измеримые функции как пределы последовательностей элементарных функций (131). 3.1.5. Сходимость почти всюду (133). 3.1.6. Измеримые функции в произведениях пространств (135). 3.1.7. Меры, индуцированные измеримыми функциями (136). Задачи (136).

§ 3.2. Сходимость по мере. Почти равномерная сходимость .. 139

3.2.1. Сходимость по мере (139). 3.2.2. Связь сходимости почти всюду со сходимостью по мере (141). 3.2.3. Достаточность фундаментальности по мере для сходимости по мере (144). 3.2.4. Почти равномерная сходимость (145). 3.2.5. Измеримые функции как пределы последовательностей простых функций (148). 3.2.6. Свойство функции, измеримой относительно σ -алгебры, индуцированной другой функцией (149). Задачи (151).

§ 3.3. Интеграл Бохнера	151
3.3.1. Интегрирование простых функций (151). 3.3.2. Свойства интеграла от простой функции (152). 3.3.3. Интегрирование функций со значениями в B -пространстве (155). 3.3.4. Корректность определения интеграла (157). 3.3.5. Свойства интеграла (160). 3.3.6. Интегрируемость функции, ограниченной по норме интегрируемой функцией (163). 3.3.7. Замена переменных (167). 3.3.8. Интегралы по комплексной мере (169). 3.3.9. Интегралы от числовых функций по мере со значениями в B -пространстве (170). Задачи (170).	
§ 3.4. Интегралы Лебега, Лебега — Стильеса и Римана	171
3.4.1. Интеграл Лебега (171). 3.4.2. Интеграл Лебега по лебеговой мере (174). 3.4.3. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана (174). 3.4.4. Случай несобственного интеграла Римана (177). 3.4.5. Интегралы Лебега — Стильеса и Римана — Стильеса (179). 3.4.6. Интегралы от функций со значениями в B -пространстве по мере Лебега (181). Задачи (183).	
§ 3.5. Переход к пределу под знаком интеграла	185
3.5.1. Теорема о монотонной сходимости (185). 3.5.2. Почленное интегрирование рядов (188). 3.5.3. Лемма Фату (189). 3.5.4. Теорема о мажорируемой последовательности (190). 3.5.5. Общая теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (191). 3.5.6. Общая теорема о почленном интегрировании рядов (193). Задачи (195).	
§ 3.6. Абсолютная непрерывность и сингулярность мер	198
3.6.1. Определения (198). 3.6.2. Разложение меры на абсолютно непрерывную и сингулярную части (200). 3.6.3. Теорема Радона — Никодима (204). Задачи (206).	
§ 3.7. Лебеговы пространства	208
3.7.1. Определение лебегова пространства (208). 3.7.2. Вспомогательное неравенство (208). 3.7.3. Норма в лебеговом пространстве (210). 3.7.4. Сходимость в среднем (211). 3.7.5. Плотность множества простых функций в лебеговом пространстве (214). 3.7.6. Гильбертово пространство скалярных функций с интегрируемым квадратом модуля (215). 3.7.7. Плотность множества непрерывных функций в пространстве $L_p(X)$ (216). 3.7.8. Пространства Соболева (217). Задачи (219).	

§ 3.8. Меры в произведениях пространств. Кратные интегралы.....	220
3.8.1. Меры в произведении двух пространств (220). 3.8.2. Теорема Фубини (224). 3.8.3. Кратные и повторные интегралы (226). 3.8.4. Меры в конечных произведениях пространств (227). 3.8.5. Меры в бесконечных произведениях пространств (228). Задачи (233).	
Г л а в а 4. Топологические пространства.....	239
§ 4.1. Основные понятия топологии.....	239
4.1.1. Сходимость и непрерывность в терминах окрестностей (239). 4.1.2. Топология (240). 4.1.3. Индуцированная топология (242). 4.1.4. Внутренние точки, точки прикосновения и предельные точки множеств (242). 4.1.5. Базы и предбазы (244). 4.1.6. Тихоновское произведение топологических пространств (247). Задачи (247).	
§ 4.2. Аксиомы отделимости и счетности.....	248
4.2.1. Аксиомы отделимости (248). 4.2.2. База окрестностей точки (253). 4.2.3. Аксиомы счетности (253). 4.2.4. Плотные множества. Сепарабельные пространства (254). Задачи (256).	
§ 4.3. Сходимость. Непрерывность функции.....	257
4.3.1. Сходимость последовательности (257). 4.3.2. Непрерывность функции (259). 4.3.3. Основной способ задания топологии (261). 4.3.4. Измеримые топологические пространства (262). Задачи (263).	
§ 4.4. Компактность.....	264
4.4.1. Компактные множества и пространства (264). 4.4.2. Центрированная система замкнутых множеств (265). 4.4.3. Свойства компактных множеств и пространств (266). 4.4.4. Предкомпактные множества (270). 4.4.5. Непрерывные отображения компактных множеств (270). Задачи (271).	
§ 4.5. Компактность в метрических пространствах.....	272
4.5.1. Вполне ограниченные множества в метрическом пространстве (272). 4.5.2. Свойства компактных множеств в метрических пространствах (273). 4.5.3. Непрерывные функции на компакте (276). 4.5.4. Критерий предкомпактности множества непрерывных функций (277).	

Г л а в а 5. Топологические линейные пространства	282
§ 5.1. Линейные функционалы	282
5.1.1. Операции над множествами в линейном пространстве (282).	
5.1.2. Выпуклые множества (282).	
5.1.3. Линейные функционалы (282).	
5.1.4. Продолжение линейного функционала (283).	
5.1.5. Выпуклые функционалы (284).	
5.1.6. Теорема Хана — Банаха о продолжении линейного функционала (284).	
5.1.7. Ядро линейного функционала (288). Задачи (290).	
§ 5.2. Топологии в линейных пространствах	291
5.2.1. Определение топологического линейного пространства (291).	
5.2.2. Фундаментальность последовательности (292).	
5.2.3. Локальная выпуклость пространства (292).	
5.2.4. Способы задания топологии в линейном пространстве (293).	
5.2.5. Непрерывные линейные функции в топологических линейных пространствах (298).	
5.2.6. Ограниченные линейные функции (299).	
5.2.7. Ограниченные линейные функции в нормированных линейных пространствах (299).	
5.2.8. Норма линейной функции (300).	
5.2.9. Теорема Хана — Банаха для нормированных линейных пространств (301). Задачи (303).	
§ 5.3. Слабые топологии	306
5.3.1. Определение слабой топологии (306).	
5.3.2. Слабая сходимость (308).	
5.3.3. Слабо непрерывные функции (309).	
5.3.4. Слабо измеримые функции (310).	
5.3.5. Совпадение измеримости и слабой измеримости функций со значениями в сепарабельном B -пространстве (312). Задачи (313).	
Г л а в а 6. Пространства операторов и функционалов	315
§ 6.1. Общая теория	315
6.1.1. Действия над операторами и функционалами (315).	
6.1.2. Пространства линейных операторов и функционалов (318).	
6.1.3. Сопряженные пространства (320).	
6.1.4. Топологии в пространстве ограниченных линейных операторов (324). Задачи (325).	
§ 6.2. Слабые интегралы	326
6.2.1. Определение слабого интеграла (326).	
6.2.2. Свойства слабого интеграла (329).	
6.2.3. Связь слабого интеграла с сильным (331).	
6.2.4. Переход к пределу под знаком слабого интеграла (334).	
6.2.5. Теорема Фубини (335). Задачи (337).	

§ 6.3. Обобщенные функции	338
6.3.1. Понятие обобщенной функции (338). 6.3.2. Два подхода к определению обобщенных функций (339). 6.3.3. Пространство основных функций (340). 6.3.4. Определение обобщенной функции (344). 6.3.5. Пространство обобщенных функций (346). 6.3.6. Регулярные и сингулярные обобщенные функции (348). 6.3.7. Локальные свойства обобщенных функций (349). 6.3.8. Замена переменных в обобщенных функциях (351). 6.3.9. Дифференцирование обобщенных функций (352). 6.3.10. Ряды обобщенных функций (354). 6.3.11. Произведение обобщенной функции на основную (356). 6.3.12. Первообразная обобщенной функции (357). 6.3.13. Представление δ -функции интегралом Фурье (360). 6.3.14. Представление производных δ -функции интегралом Фурье (362). 6.3.15. Произведения δ -функций и их производных (363). Задачи (364).	
§ 6.4. Сопряженные пространства некоторых функциональных пространств	369
6.4.1. Пространство, сопряженное с пространством непрерывных функций (369). 6.4.2. δ -функция как непрерывный линейный функционал на пространстве непрерывных функций (380). 6.4.3. Пространства, сопряженные с пространствами дифференцируемых функций (381). 6.4.4. δ -функция и ее производные как непрерывные линейные функционалы на пространствах дифференцируемых функций (383). 6.4.5. Применение в теории управления (384). 6.4.6. Пространства, сопряженные с лебеговыми пространствами (387). Задачи (391).	
Г л а в а 7. Линейные операторы	393
§ 7.1. Основные понятия и теоремы	393
7.1.1. Замкнутые операторы (393). 7.1.2. Перестановочность интеграла с линейным оператором (394). 7.1.3. Сопряженные операторы (398). 7.1.4. Существование сопряженного оператора (406). 7.1.5. Положительные операторы (410). 7.1.6. Изометрические операторы (411). 7.1.7. Унитарные операторы (412). 7.1.8. Унитарно эквивалентные операторы (413). 7.1.9. Теорема Банаха — Штейнгауза (413). 7.1.10. Ограниченные линейные операторы в нормированном линейном пространстве (417). 7.1.11. Теорема Банаха об обратном операторе (418). Задачи (421).	

§ 7.2. Операторные уравнения	423
7.2.1. Общий вид операторного уравнения (423). 7.2.2. Производные функций со значениями в B -пространстве по действительной переменной (423). 7.2.3. Интегралы от функций со значениями в B -пространстве по действительной переменной (425). 7.2.4. Дифференциальные уравнения в B -пространстве (426). 7.2.5. Интегральные уравнения (431). 7.2.6. Сжимающие отображения (432). 7.2.7. Существование и единственность неподвижной точки оператора (432). 7.2.8. Существование и единственность решения интегрального уравнения (436). 7.2.9. Существование и единственность решения линейного интегрального уравнения Вольтерры (438). 7.2.10. Существование и единственность решения дифференциального уравнения (439). 7.2.11. Существование и единственность решения линейного интегрального уравнения Фредгольма (441). Задачи (442).	
§ 7.3. Спектр оператора	443
7.3.1. Собственные значения (443). 7.3.2. Резольвента и спектр оператора (444). 7.3.3. Свойства резольвенты (447). 7.3.4. Свойства спектра линейного оператора в B -пространстве (449). 7.3.5. Спектр унитарного оператора (451). Задачи (452).	
Г л а в а 8. Линейные операторы в гильбертовых пространствах	456
§ 8.1. Гильбертовы пространства	456
8.1.1. Ортогональные подпространства (456). 8.1.2. Линейные функционалы (458). 8.1.3. Продолжение линейного функционала (460). Задачи (462).	
§ 8.2. Линейные операторы	462
8.2.1. Ограниченные линейные операторы (462). 8.2.2. Изометрические и унитарные операторы в H -пространствах (465). 8.2.3. Оператор Фурье — Планшереля (467). 8.2.4. Неограниченные линейные операторы (472). Задачи (476).	
§ 8.3. Самосопряженные операторы	477
8.3.1. Самосопряженные и симметричные операторы (477). 8.3.2. Формула для нормы самосопряженного оператора (478). 8.3.3. Спектр самосопряженного оператора (479). Задачи (483).	
§ 8.4. Проекторы	484
8.4.1. Проекторы и их свойства (484). 8.4.2. Сходимость последовательностей операторов (489). 8.4.3. Последовательности про-	

екторов (490). 8.4.4. Общее определение проектора (491). Задачи (492).	
§ 8.5. Последовательности векторов и базисы	492
8.5.1. Последовательности векторов (492). 8.5.2. Ортогональные и ортонормальные последовательности (493). 8.5.3. Разложение вектора по ортонормальным векторам (494). 8.5.4. Полные последовательности векторов и базисы (495). 8.5.5. Представление функций рядами (496). 8.5.6. Условия существования базиса в H -пространстве (507). 8.5.7. Биортогональные и биортонормальные последовательности (508). 8.5.8. Разложение вектора по базису, образованному биортонормальной последовательностью (511). Задачи (514).	
§ 8.6. Компактные операторы	519
8.6.1. Определение компактного оператора (519). 8.6.2. Свойства компактных операторов (519). 8.6.3. Спектр компактного оператора (524). 8.6.4. Нормальные операторы (530). 8.6.5. Операторы с конечной абсолютной нормой (531). 8.6.6. Операторы Гильберта — Шмидта (534). 8.6.7. Ядерные операторы (538). 8.6.8. Линейные интегральные уравнения Фредгольма (540). Задачи (543).	
Г л а в а 9. Спектральная теория линейных операторов ..	546
§ 9.1. Спектральное разложение компактного самосопряженного оператора	546
9.1.1. Существование собственных значений (546). 9.1.2. Спектральное разложение (548). 9.1.3. Линейные интегральные уравнения Фредгольма с симметричным ядром (552). 9.1.4. Метод решения интегральных уравнений одного класса (555). 9.1.5. Интегральное представление оператора (569). 9.1.6. Разложение единицы (571). Задачи (573).	
§ 9.2. Операторы, определяемые разложением единицы	575
9.2.1. Интеграл по операторной мере от простой функции (575). 9.2.2. Интеграл по операторной мере от измеримой функции (576). 9.2.3. Сопряженный оператор (579). 9.2.4. Коммутативность операторов (583). 9.2.5. Нормальные операторы (586). 9.2.6. Обратный оператор (587). 9.2.7. Спектр (589). 9.2.8. Канонические формы операторов, определяемых разложением единицы (590). Задачи (594).	

§ 9.3. Функции от операторов	596
9.3.1. Операторные полиномы и ряды (596). 9.3.2. Полиномы относительно унитарного оператора (597). 9.3.3. Функции от унитарного оператора (599). 9.3.4. Преобразование Кэли (604). 9.3.5. Функции от самосопряженного оператора (605). 9.3.6. Спектральная мера самосопряженного оператора (606).	
§ 9.4. Спектральные разложения линейных операторов	608
9.4.1. Интегральное представление операторных функций класса C (608). 9.4.2. Спектральное разложение самосопряженного оператора (609). 9.4.3. Спектральное разложение унитарного оператора (613). 9.4.4. Спектральное разложение группы унитарных операторов (617). 9.4.5. Спектральное разложение нормального оператора (620). Задачи (622).	
Г л а в а 10. Нелинейные задачи функционального анализа	624
§ 10.1. Дифференцирование операторов и функционалов	624
10.1.1. Сильные дифференциалы и производные (624). 10.1.2. Дифференцирование сложной функции (627). 10.1.3. Формула конечных приращений (628). 10.1.4. Слабые дифференциалы и производные (629). 10.1.5. Связь слабой дифференцируемости с сильной (630). 10.1.6. Дифференциалы и производные высших порядков (633). 10.1.7. Формула и ряд Тейлора (635). Задачи (639).	
§ 10.2. Экстремумы функционалов	642
10.2.1. Необходимое условие экстремума (642). 10.2.2. Второе необходимое условие экстремума (648). 10.2.3. Достаточное условие экстремума (648). 10.2.4. Условные экстремумы (649). Задачи (652).	
§ 10.3. Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах	655
10.3.1. Линейные дифференциальные уравнения (655). 10.3.2. Эволюционные операторы (658). 10.3.3. Решение линейных дифференциальных уравнений (663). 10.3.4. Нелинейные дифференциальные уравнения (667). Задачи (670).	
Г л а в а 11. Приближенные методы функционального анализа	676
§ 11.1. Методы последовательных приближений	676

11.1.1. Операторные уравнения (676). 11.1.2. Существование функции, заданной неявно (677). 11.1.3. Общие замечания о приближенных методах (677). 11.1.4. Метод Ньютона (679). 11.1.5. Модифицированный метод Ньютона (683). Задачи (686).	
§ 11.2. Другие приближенные методы	687
11.2.1. Общие принципы приближенных методов (687). 11.2.2. Сходимость приближенных решений к точному (695). 11.2.3. Метод Рунге — Кутты (700). 11.2.4. Метод Бундса — Галеркина (702). 11.2.5. Метод конечных элементов (711). Задачи (714).	
§ 11.3. Некорректные задачи	715
11.3.1. Два определения корректности (715). 11.3.2. Регуляризация некорректных задач (718). 11.3.3. Методы нахождения регуляризирующего оператора (720). 11.3.4. Выбор параметра регуляризации (727). 11.3.5. Обобщение метода регуляризации (728). 11.3.6. О точности задания исходных данных (728). Задачи (729).	
Литература	731
Предметный указатель	733