

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие (В.А. Садовничий)	3
Предисловие к седьмому изданию	13
Из предисловия к первому изданию	14

ГЛАВА I

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

§ 1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка	15
1. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными (15). 2. Классификация уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными (22). 3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (24).	
Задачи к главе I	26

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач	27
1. Уравнение малых поперечных колебаний струны (27). 2. Уравнение продольных колебаний стержней и струн (31). 3. Энергия колебаний струны (32). 4. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах (34). 5. Поперечные колебания мембраны (35). 6. Уравнения гидродинамики и акустики (38). 7. Граничные и начальные условия (43). 8. Редукция общей задачи (48). 9. Постановка краевых задач для случая многих переменных (49). 10. Теорема единственности (50). Задачи (53).	
§ 2. Метод распространяющихся волн	54
1. Формула Даламбера (54). 2. Физическая интерпретация (57). 3. Примеры (59). 4. Неоднородное уравнение (62). 5. Устойчивость решений (64). 6. Полуограниченная прямая и метод продолжений (68). 7. Задачи для ограниченного отрезка (74). 8. Дисперсия волн (78). 9. Интегральное уравнение колебаний (79). 10. Распространение разрывов вдоль характеристик (83). Задачи (85).	

§ 3. Метод разделения переменных	87
1. Уравнение свободных колебаний струны (87). 2. Интерпретация решения (93). 3. Представление произвольных колебаний в виде суперпозиции стоячих волн (96). 4. Неоднородные уравнения (101). 5. Общая первая краевая задача (108). 6. Краевые задачи со стационарными неоднородностями (109). 7. Задачи без начальных условий (111). 8. Сосредоточенная сила (116). 9. Общая схема метода разделения переменных (119). Задачи (126).	
§ 4. Задача с данными на характеристиках	128
1. Постановка задачи (128). 2. Метод последовательных приближений для задачи Гурса (129). Задачи (135).	
§ 5. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа .	135
1. Сопряженные дифференциальные операторы (135). 2. Интегральная форма решения (136). 3. Физическая интерпретация функции Римана (139). 4. Уравнения с постоянными коэффициентами (143).	
Задачи к главе II	147
Приложения к главе II	148
I. О колебании струн музыкальных инструментов	148
II. О колебании стержней	151
III. Колебания нагруженной струны	155
1. Постановка задачи (155). 2. Собственные колебания нагруженной струны (156). 3. Струна с грузом на конце (161). 4. Поправки для собственных значений (161).	
IV. Уравнения газодинамики и теория ударных волн	162
1. Уравнения газодинамики. Закон сохранения энергии (162). 2. Ударные волны. Условия динамической совместности (165). 3. Слабые разрывы (170).	
V. Динамика сорбции газов	174
1. Уравнения, описывающие процесс сорбции газа (174). 2. Асимптотическое решение (178).	
VI. Физические аналогии	185

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач	189
1. Линейная задача о распространении тепла (189). 2. Уравнение диффузии (193). 3. Распространение тепла в пространстве (194). 4. Постановка краевых задач (196). 5. Принцип максимального значения (202). 6. Теорема единственности (205). 7. Теорема единственности для бесконечной прямой (208).	
§ 2. Метод разделения переменных	209
1. Однородная краевая задача (209). 2. Функция источника (213). 3. Краевые задачи с разрывными начальными условиями (215). 4. Неоднородное уравнение теплопроводности (222). 5. Общая первая краевая задача (225). Задачи (227).	

§ 3. Задачи на бесконечной прямой	228
1. Распространение тепла на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области (228). 2. Краевые задачи для полуограниченной прямой (242).	
§ 4. Задачи без начальных условий	250
Задачи к главе III	254
Приложения к главе III	256
I. Температурные волны	256
II. Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры	259
III. Метод подобия в теории теплопроводности	264
1. Функция источника для бесконечной прямой (264). 2. Краевые задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности (267). 3. Режимы с обострением. Эффект локализации тепла (274).	
IV. Задача о фазовом переходе	277
V. Уравнение Эйнштейна — Колмогорова	282
VI. δ -Функция	286
1. Определение δ -функции (286). 2. Разложение δ -функции в ряд Фурье (289). 3. Применение δ -функции к построению функции источника (291).	

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа	295
1. Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач (295). 2. Потенциальное течение жидкости. Потенциал стационарного тока и электростатического поля (296). 3. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат (298). 4. Некоторые частные решения уравнения Лапласа (301). 5. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного (303). 6. Преобразование обратных радиусов-векторов (305).	
§ 2. Общие свойства гармонических функций	307
1. Формулы Грина. Интегральное представление решения (307). 2. Некоторые основные свойства гармонических функций (313). 3. Единственность и устойчивость решения первой внутренней краевой задачи (317). 4. Задачи с разрывными граничными условиями (318). 5. Изолированные особые точки (319). 6. Регулярность гармонической функции трех переменных в бесконечности (321). 7. Внешние краевые задачи. Единственность решения двух- и трехмерных задач (322). 8. Вторая краевая задача. Теорема единственности (325).	
§ 3. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных	328
1. Первая краевая задача для круга (328). 2. Интеграл Пуассона (333). 3. Случай разрывных граничных значений (336).	

§ 4. Функция источника

1. Функция источника для уравнения $\Delta u = 0$ и ее основные свойства (338).
2. Метод электростатических изображений и функция источника для сферы (343).
3. Функция источника для круга (346).
4. Функция источника для полупространства (347).

§ 5. Теория потенциала

1. Объемный потенциал (348).
2. Плоская задача. Логарифмический потенциал (351).
3. Несобственные интегралы (353).
4. Первые производные объемного потенциала (360).
5. Вторые производные объемного потенциала (363).
6. Поверхностные потенциалы (367).
7. Поверхности и кривые Ляпунова (371).
8. Разрыв потенциала двойного слоя (374).
9. Свойства потенциала простого слоя (377).
10. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач (380).
11. Интегральные уравнения, соответствующие краевым задачам (386).

Задачи к главе IV

Приложения к главе IV

I. Асимптотическое выражение объемного потенциала

II. Задачи электростатики

III. Основная задача электроразведки

IV. Определение векторных полей

V. Применение метода конформного преобразования в электростатике

VI. Применение метода конформного преобразования в гидродинамике

VII. Бигармоническое уравнение

1. Единственность решения (423).
2. Представление бигармонических функций через гармонические функции (424).
3. Решение бигармонического уравнения для круга (425).

ГЛАВА V

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Задача с начальными условиями

1. Уравнение колебаний в пространстве (427).
2. Метод усреднения (429).
3. Формула Пуассона (430).
4. Метод спуска (433).
5. Физическая интерпретация (434).
6. Метод отражения (436).

§ 2. Интегральная формула

1. Вывод интегральной формулы (437).
2. Следствия из интегральной формулы (441).

§ 3. Колебания ограниченных объемов

1. Общая схема метода разделения переменных. Стоячие волны (444).
2. Колебания прямоугольной мембраны (450).
3. Колебания круглой мембраны (454).

Задачи к главе V	460
Приложения к главе V	461
I. Приведение уравнений теории упругости к уравнениям колебаний	461
II. Уравнения электромагнитного поля	464
1. Уравнения электромагнитного поля и граничные условия (464).	
2. Потенциалы электромагнитного поля (468). 3. Электромагнитное поле осциллятора (470).	

ГЛАВА VI

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Распространение тепла в неограниченном пространстве	477
1. Функция температурного влияния (477). 2. Распространение тепла в неограниченном пространстве (481).	
§ 2. Распространение тепла в ограниченных телах	486
1. Схема метода разделения переменных (486). 2. Остывание круглого цилиндра (489). 3. Определение критических размеров (491).	
§ 3. Краевые задачи для областей с подвижными границами	493
1. Формула Грина для уравнения теплопроводности и функция источника (493). 2. Решение краевой задачи (498). 3. Функция источника для отрезка (500).	
§ 4. Тепловые потенциалы	502
1. Свойства тепловых потенциалов простого и двойного слоя (502).	
2. Решение краевых задач (505). 3. Условия локализации граничных режимов с обострением (507).	

Задачи к главе VI	510
Приложения к главе VI	511
I. Диффузия облака	511
II. О размагничивании цилиндра с обмоткой	514

ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА (продолжение)

§ 1. Основные задачи, приводящие к уравнению $\Delta v + cv = 0$	519
1. Установившиеся колебания (519). 2. Диффузия газа при наличии распада и при цепных реакциях (520). 3. Диффузия в движущейся среде (520). 4. Постановка внутренних краевых задач для уравнения $\Delta v + cv = 0$ (521).	
§ 2. Функции влияния точечных источников	522
1. Функции влияния точечных источников (522). 2. Интегральное представление решения (525). 3. Потенциалы (528).	

- § 3. Задачи для неограниченной области. Принцип излучения . . .
1. Уравнение $\Delta u + cu = -f$ в неограниченном пространстве (531).
 2. Принцип предельного поглощения (532).
 3. Принцип предельной амплитуды (534).
 4. Условия излучения (535).
- § 4. Задачи математической теории дифракции
1. Постановка задачи (541).
 2. Единственность решения задачи дифракции (542).
 3. Дифракция на сфере (545).
- Задачи к главе VII
- Приложения к главе VII
- I. Волны в цилиндрических трубах
- II. Электромагнитные колебания в полых резонаторах
1. Собственные колебания цилиндрического эндовибратора (565).
 2. Электромагнитная энергия собственных колебаний (569).
 3. Возбуждение колебаний в эндовибраторе (572).
- III. Скин-эффект
- IV. Распространение радиоволн над поверхностью земли

ДОПОЛНЕНИЕ I

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

- § 1. Основные понятия
1. Сетки и сеточные функции (586).
 2. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов (587).
 3. Разностная задача (593).
 4. Устойчивость (594).
- § 2. Разностные схемы для уравнения теплопроводности
1. Схемы для уравнения с постоянными коэффициентами (597).
 2. Погрешность аппроксимации (599).
 3. Энергетическое тождество (601).
 4. Устойчивость (605).
 5. Сходимость и точность (608).
 6. Разностные схемы для уравнений с переменными коэффициентами (609).
 7. Метод баланса. Консервативные схемы (610).
 8. Двухслойные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами (614).
 9. Трехслойные схемы (620).
 10. Решение систем разностных уравнений. Метод прогонки (622).
 11. Разностные методы решения квазилинейных уравнений (624).
- § 3. Метод конечных разностей для решения задачи Дирихле . . .
1. Разностная аппроксимация оператора Лапласа (628).
 2. Принцип максимума (632).
 3. Оценка решения неоднородного уравнения (635).
 4. Сходимость решения разностной задачи Дирихле (636).
- § 4. Разностные методы решения задач с несколькими пространственными переменными
1. Многомерные схемы (638).
 2. Экономичные схемы (640).
- § 5. Итерационные методы решения сеточных уравнений
1. Модельная задача (649).
 2. Итерационные методы линейной алгебры (651).
 3. Выбор итерационных параметров (652).
 4. Итерационные методы вариационного типа (654).
 5. Диагональный оператор B (656).
 6. Попеременно-треугольный итерационный метод (657).

ДОПОЛНЕНИЕ II

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Введение (660). 2. Общее уравнение теории специальных функций (662). 3. Поведение решений в окрестности $x = a$, если $k(a) = 0$ (663). 4. Постановка краевых задач (665).

Часть I. Цилиндрические функции	668
§ 1. Цилиндрические функции	668

1. Степенные ряды (669). 2. Рекуррентные формулы (673). 3. Функции полуцелого порядка (674). 4. Асимптотический порядок цилиндрических функций (675).

§ 2. Краевые задачи для уравнения Бесселя	678
§ 3. Различные типы цилиндрических функций	682

1. Функции Ханкеля (682). 2. Функции Ханкеля и Неймана (684). 3. Функции мнимого аргумента (686). 4. Функция $K_0(x)$ (688).

§ 4. Представление цилиндрических функций в виде контурных интегралов	693
---	-----

1. Контурные интегралы (693). 2. Функции Ханкеля (695). 3. Некоторые свойства гамма-функции (696). 4. Интегральное представление функции Бесселя (698). 5. Интегральное представление $K_\nu(x)$ (699). 6. Асимптотические формулы для цилиндрических функций (701).

§ 5. Интеграл Фурье — Бесселя и некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя	703
---	-----

1. Интеграл Фурье — Бесселя (703). 2. Некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя (705).

Часть II. Сферические функции	709
§ 1. Полиномы Лежандра	709

1. Производящая функция и полиномы Лежандра (709). 2. Рекуррентные формулы (711). 3. Уравнение Лежандра (712). 4. Ортогональность полиномов Лежандра (713). 5. Норма полиномов Лежандра (714). 6. Нули полиномов Лежандра (715). 7. Ограниченность полиномов Лежандра (715).

§ 2. Присоединенные функции Лежандра	716
--------------------------------------	-----

1. Присоединенные функции (716). 2. Норма присоединенных функций (717). 3. Полнота системы присоединенных функций (718).

§ 3. Гармонические полиномы и сферические функции	720
---	-----

1. Гармонические полиномы (720). 2. Сферические функции (721). 3. Ортогональность системы сферических функций (724). 4. Замкнутость системы сферических функций (727). 5. Разложение по сферическим функциям (728).

§ 4. Некоторые примеры применения сферических функций	732
---	-----

1. Задача Дирихле для сферы (733). 2. Проводящая сфера в поле точечного заряда (733). 3. Поляризация шара в однородном поле (734). 4. Собственные колебания сферы (737). 5. Внешняя краевая задача для сферы (740).

Часть III. Полиномы Чебышёва — Эрмита и Чебышёва — Лагерра	742
§ 1. Полиномы Чебышёва — Эрмита	742
1. Дифференциальная формула (742). 2. Рекуррентные формулы (743). 3. Уравнение Чебышёва — Эрмита (743). 4. Норма полиномов $H_n(x)$ (744). 5. Функции Чебышёва — Эрмита (745).	
§ 2. Полиномы Чебышёва — Лагерра	745
1. Дифференциальная формула (745). 2. Рекуррентные формулы (746). 3. Уравнение Чебышёва — Лагерра (746). 4. Ортогональность и норма полиномов Чебышёва — Лагерра (747). 5. Обобщенные полиномы Чебышёва — Лагерра (747).	
§ 3. Простейшие задачи для уравнения Шрёдингера	749
1. Уравнение Шрёдингера (749). 2. Гармонический осциллятор (750). 3. Ротатор (752). 4. Движение электрона в кулоновом поле (753).	
Часть IV. Формулы, таблицы и графики	758
I. Основные свойства специальных функций	758
II. Таблицы	764
III. Графики специальных функций	767
IV. Различные ортогональные системы координат	769

ДОПОЛНЕНИЕ III

ОБЩЕНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Некоторые понятия функционального анализа	777
1. Вспомогательные сведения об интеграле Лебега, обобщенной частной производной и некоторых функциональных пространствах (777). 2. Функциональные пространства (781).	
§ 2. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона	782
1. Определение обобщенного решения задачи Дирихле (782). 2. Два основных неравенства (785). 3. Единственность и существование обобщенного решения задачи Дирихле (787).	
Дополнительная литература	791
Предметный указатель	792