

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	11
Предисловие	15
ГЛАВА 1. ГАММА- И БЕТА-ФУНКЦИИ	19
§ 1.1. Гамма- и бета-интегралы; гамма- и бета-функции	19
§ 1.2. Формула отражения Эйлера	26
§ 1.3. Дзета-функции Гурвица и Римана	32
§ 1.4. Асимптотическая формула Стирлинга	34
§ 1.5. Формула умножения Гаусса для $\Gamma(mx)$	37
§ 1.6. Интегральные представления $\ln \Gamma(x)$ и $\psi(x)$	40
§ 1.7. Формула Куммера для разложения Фурье $\ln \Gamma(x)$	43
§ 1.8. Интегралы Дирихле и объемы эллипсоидов	46
§ 1.9. Теорема Бора—Моллерапа	48
§ 1.10. Суммы Гаусса и Якоби	50
§ 1.11. Вероятностное вычисление бета-функции	57
§ 1.12. p -адическая гамма-функция	58
Упражнения	60
ГЛАВА 2. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ	73
§ 2.1. Гипергеометрические ряды	73
§ 2.2. Интегральное представление Эйлера	77
§ 2.3. Гипергеометрическое уравнение	83
§ 2.4. Интеграл Барнса и гипергеометрическая функция	94
§ 2.5. Соотношения смежности	103
§ 2.6. Дилогарифмы	110
§ 2.7. Биномиальные суммы	114
§ 2.8. Двусторонний ряд Дуголла	117
§ 2.9. Интегрирование по частям дробного порядка и гипергеометрические интегралы	118
Упражнения	121
ГЛАВА 3. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ТОЖДЕСТВА	129
§ 3.1. Квадратичные преобразования	130
§ 3.2. Арифметико-геометрическое среднее и эллиптические интегралы	136
§ 3.3. Преобразования уравновешенных рядов	143
§ 3.4. Преобразование Уиппла	146
§ 3.5. Формула Дуголла и гипергеометрические тождества	149
§ 3.6. Интегральные аналоги гипергеометрических сумм	152
§ 3.7. Соотношения смежности	155
§ 3.8. Многочлены Вильсона	158
§ 3.9. Квадратичные преобразования — подход Римана	160

§ 3.10. Неопределенное гипергеометрическое суммирование	162
§ 3.11. W—Z-метод	166
§ 3.12. Соотношения смежности и методы суммирования	172
Упражнения	174
Глава 4. Функции Бесселя и вырожденные гипергеометрические функции	183
§ 4.1. Вырожденное гипергеометрическое уравнение	184
§ 4.2. Интеграл Барнса для ${}_1F_1$	187
§ 4.3. Функции Уиттекера	190
§ 4.4. Примеры функций ${}_1F_1$ и функций Уиттекера	191
§ 4.5. Уравнение Бесселя и функции Бесселя	194
§ 4.6. Рекуррентные соотношения	196
§ 4.7. Интегральные представления функций Бесселя	197
§ 4.8. Асимптотические разложения	202
§ 4.9. Преобразования Фурье и функции Бесселя	203
§ 4.10. Теоремы сложения	206
§ 4.11. Интегралы от функций Бесселя	208
§ 4.12. Модифицированные функции Бесселя	214
§ 4.13. Интеграл Николсона	215
§ 4.14. Нули функций Бесселя	217
§ 4.15. Более тонкие свойства нулей функций Бесселя	220
§ 4.16. Области, свободные от нулей функций ${}_1F_1$	222
Упражнения	225
Глава 5. Ортогональные многочлены	231
§ 5.1. Многочлены Чебышёва	231
§ 5.2. Рекуррентные соотношения	235
§ 5.3. Гауссовы квадратуры	238
§ 5.4. Нули ортогональных многочленов	242
§ 5.5. Непрерывные дроби	245
§ 5.6. Полиномиальные воспроизводящие ядра	248
§ 5.7. Формула Парсеваля	251
§ 5.8. Производящая функция моментов	254
Упражнения	256
Глава 6. Специальные ортогональные многочлены	263
§ 6.1. Многочлены Эрмита	264
§ 6.2. Многочлены Лагерра	268
§ 6.3. Многочлены Якоби и определители Грама	277
§ 6.4. Производящая функция многочленов Якоби	280
§ 6.5. Полнота систем ортогональных многочленов	288
§ 6.6. Асимптотическое поведение $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ при больших n	291
§ 6.7. Интегральные представления многочленов Якоби	294
§ 6.8. Линеаризация произведения ортогональных многочленов	297
§ 6.9. Паросочетательные многочлены	302
§ 6.10. Гипергеометрические ортогональные многочлены	309

§ 6.11. Обобщенные ультрасферические многочлены	311
Упражнения	315
ГЛАВА 7. ЕЩЕ ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ	329
§ 7.1. Коэффициенты перехода	329
§ 7.2. Рациональные функции с положительными коэффициентами разложения	336
§ 7.3. Положительность коэффициентов квадратурных формул и неравенства Вьеториса	343
§ 7.4. Положительные суммы многочленов и гипотеза Бибераха	351
§ 7.5. Теорема Турана	354
§ 7.6. Положительность сумм ультрасферических многочленов	357
§ 7.7. Иррациональность $\zeta(3)$	360
Упражнения	363
ГЛАВА 8. ИНТЕГРАЛ СЕЛЬБЕРГА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ	369
§ 8.1. Интегралы Сельберга и Аомото	369
§ 8.2. Доказательство формулы Сельберга, данное Аомото	370
§ 8.3. Обобщения интегральной формулы Аомото	374
§ 8.4. Доказательство формулы Сельберга, данное Андерсоном	378
§ 8.5. Проблема Стилтеса и определитель многочленов Якоби	382
§ 8.6. Неравенство Зигеля	385
§ 8.7. Задача Стилтеса на единичном круге	390
§ 8.8. Тождества для свободного члена	392
§ 8.9. Тождества для почти уравновешенного ряда ${}_3F_2$	393
§ 8.10. Соотношение Хассе—Давенпорта	395
§ 8.11. Аналог интеграла Сельберга для конечного поля	399
Упражнения	403
ГЛАВА 9. СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ	409
§ 9.1. Гармонические многочлены	409
§ 9.2. Трехмерное уравнение Лапласа	411
§ 9.3. Размерность пространства гармонических многочленов степени k	413
§ 9.4. Ортогональность гармонических многочленов	414
§ 9.5. Действие ортогональной матрицы	415
§ 9.6. Теорема сложения	416
§ 9.7. Формула Функа—Гекке	420
§ 9.8. Теорема сложения для ультрасферических многочленов	421
§ 9.9. Ядро Пуассона и задача Дирихле	425
§ 9.10. Преобразования Фурье	425
§ 9.11. Конечномерные представления компактных групп	427
§ 9.12. Группа $SU(2)$	430
§ 9.13. Представления группы $SU(2)$	431
§ 9.14. Многочлены Якоби как матричные элементы	433
§ 9.15. Еще одна теорема сложения	434
§ 9.16. Связь группы $SU(2)$ с группой вращений $SO(3)$	436

Упражнения	437
ГЛАВА 10. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ q-РЯДОВ	441
§ 10.1. q -интеграл	444
§ 10.2. q -биномиальная теорема	446
§ 10.3. q -гамма-функция	450
§ 10.4. Тождество тройного произведения	454
§ 10.5. Формула суммирования Рамануджана	458
§ 10.6. Представление чисел суммами квадратов	461
§ 10.7. Эллиптические и θ -функции	464
§ 10.8. q -бета-интегралы	467
§ 10.9. Базисные гипергеометрические ряды	473
§ 10.10. Базисные гипергеометрические тождества	475
§ 10.11. q -ультрасферические многочлены	478
§ 10.12. Преобразования Меллина	482
Упражнения	491
ГЛАВА 11. РАЗБИЕНИЯ	501
§ 11.1. Первоначальные сведения о разбиениях	501
§ 11.2. Анализ разбиений	503
§ 11.3. Библиотека алгоритмов анализа разбиений	505
§ 11.4. Производящие функции	505
§ 11.5. Некоторые результаты о разбиениях	509
§ 11.6. Графические методы	511
§ 11.7. Сравнения, связанные с разбиениями	514
Упражнения	517
ГЛАВА 12. ЦЕПИ БЕЙЛИ	521
§ 12.1. Второе доказательство тождеств Роджерса—Рамануджана, полученное Роджерсом	521
§ 12.2. Лемма Бейли	525
§ 12.3. Формула преобразования Ватсона	528
§ 12.4. Другие применения цепей Бейли	531
Упражнения	532
ДОБАВЛЕНИЕ А. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ	537
§ А.1. Бесконечные произведения	537
Упражнения	539
ДОБАВЛЕНИЕ Б. СУММИРУЕМОСТЬ И ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ	541
§ Б.1. Средние Абеля и Чезаро	541
§ Б.2. Средние Чезаро (C, α)	544
§ Б.3. Дробные интегралы	545
§ Б.4. Исторические замечания	546
Упражнения	548
ДОБАВЛЕНИЕ В. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ	551

§ В.1. Асимптотическое разложение	551
§ В.2. Свойства асимптотических разложений	552
§ В.3. Лемма Ватсона	553
§ В.4. Отношение двух гамма-функций	554
Упражнения	555
ДОБАВЛЕНИЕ Г. ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ЭЙЛЕРА—МАКЛОРЕНА	557
§ Г.1. Введение	557
§ Г.2. Формула Эйлера—Маклорена	558
§ Г.3. Применения	560
§ Г.4. Формула суммирования Пуассона	562
Упражнения	565
ДОБАВЛЕНИЕ Д. ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ЛАГРАНЖА	567
§ Д.1. Обращение рядов	567
§ Д.2. Основная лемма	567
§ Д.3. Тождество Ламберта	569
§ Д.4. Преобразование Уиппла	570
Упражнения	571
ДОБАВЛЕНИЕ Е. РЯДЫ КАК РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	573
§ Е.1. Обыкновенные точки	573
§ Е.2. Особые точки	574
§ Е.3. Регулярные особые точки	575
ДОБАВЛЕНИЕ Ж. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (В. П. СПИРИДОНОВ)	577
§ Ж.1. Введение	577
§ Ж.2. Обобщенные гамма-функции	578
§ Ж.3. Эллиптический бета-интеграл	581
§ Ж.4. Общие эллиптические гипергеометрические функции	584
§ Ж.5. Эллиптический аналог гипергеометрической функции Эйлера—Гаусса	587
§ Ж.6. Биортогональные функции гипергеометрического типа	590
§ Ж.7. Эллиптические бета-интегралы на корневых системах	592
§ Ж.8. Эллиптическое преобразование Фурье и лемма Бейли	597
§ Ж.9. Связь с теорией представлений	599
§ Ж.10. Приложения в математической физике	601
§ Ж.11. Заключение	604
ДОБАВЛЕНИЕ З. ИНДЕКСНОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (Ю. А. НЕРЕТИН)	607
§ З.1. Индексное гипергеометрическое преобразование	607
§ З.2. Приложения к специальным функциям	610
§ З.3. Вывод формулы обращения. Скачок резольвенты	616
§ З.4. Приложения к гармоническому анализу	620

ЛИТЕРАТУРА

625

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

649