

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие (В.А. Садовничий)	5
От авторов	10
Глава I. Основные уравнения математической физики и постановка начально-краевых задач	11
§ 1. Физические задачи, связанные с волновыми процессами	11
1. Малые продольные колебания упругого стержня	11
2. Малые поперечные колебания упругой струны	19
3. Случай многих пространственных переменных	22
§ 2. Процессы тепломассопереноса	34
§ 3. Стационарные процессы	39
1. Стационарное распределение тепла	39
2. Задачи электростатики	39
3. Установившиеся колебания	40
4. Установившиеся электромагнитные колебания	40
5. Постановка краевых задач	41
§ 4. Общие замечания	41
Глава II. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка	43
§ 1. Классификация уравнений с двумя независимыми переменными	44
§ 2. Приведение уравнения с двумя независимыми переменными к каноническому виду	45
§ 3. Классификация уравнений в случае многих независимых переменных	49
Глава III. Метод разделения переменных. Разложение по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля	52
§ 1. Постановка начально-краевых задач	53
§ 2. Первая и вторая формулы Грина	56
§ 3. Полные и замкнутые системы функций	57
§ 4. Общая схема метода разделения переменных для однородного уравнения	60
§ 5. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения	64
§ 6. Неоднородные граничные условия	67
§ 7. Разложение по собственным функциям для эллиптического уравнения	70
§ 8. Простейшие задачи Штурма—Лиувилля	72
Глава IV. Специальные функции	81
§ 1. Уравнение специальных функций и свойства его решений	81
§ 2. Цилиндрические функции	84
1. Уравнение Бесселя	84
2. Свойства гамма-функции	84
3. Степенной ряд для функций Бесселя	85
4. Рекуррентные формулы	88
5. Функции Бесселя полуцелого порядка	89
6. Интегральное представление функций Бесселя	91
7. Функции Ханкеля. Интегральное представление	93
8. Связь функций Ханкеля и Бесселя. Функция Неймана	97
9. Линейная независимость цилиндрических функций	98

10. Асимптотика цилиндрических функций при больших значениях аргумента	101
11. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента. Функции Инфельда и Макдональда	103
§ 3. Классические ортогональные полиномы	106
1. Определение классических ортогональных полиномов	106
2. Основные свойства классических ортогональных полиномов	107
3. Производящая функция классических ортогональных полиномов	114
4. Полиномы Якоби	115
5. Полиномы Лежандра	118
6. Полиномы Лагерра	122
7. Полиномы Эрмита	126
§ 4. Присоединенные функции Лежандра	131
1. Основные понятия	131
2. Краевая задача для присоединенных функций Лежандра	131
3. Полнота и замкнутость системы присоединенных функций Лежандра	134
§ 5. Сферические функции	139
§ 6. Шаровые функции	142
§ 7. Собственные функции оператора Лапласа для канонических областей	143
1. Собственные функции круга	143
2. Собственные функции цилиндра	147
3. Собственные функции шара	149
Глава V. Уравнения эллиптического типа. Краевые задачи для уравнения Лапласа	154
§ 1. Общие свойства гармонических функций	154
1. Формулы Грина	155
2. Основные свойства гармонических функций	164
§ 2. Внутренние краевые задачи для уравнения Лапласа	168
1. Внутренняя задача Дирихле	168
2. Внутренние вторая и третья краевые задачи	170
§ 3. Внешние краевые задачи	172
1. Функции, регулярные на бесконечности	172
2. Единственность решения внешних задач в трехмерном случае	174
3. Единственность решения внешних задач для уравнения Лапласа на плоскости	176
§ 4. Функция Грина оператора Лапласа	180
1. Функция Грина внутренней задачи Дирихле оператора Лапласа	180
2. Свойства функции Грина задачи Дирихле	183
3. Функция Грина внутренней третьей краевой задачи	184
4. Функция Грина внутренней задачи Неймана	185
5. Функции Грина внешних краевых задач	189
6. Примеры построения функций Грина	190
7. Функция Грина задачи Дирихле на плоскости	194
§ 5. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в круге и прямоугольнике	196
1. Краевые задачи для уравнения Лапласа в круге, вне круга и в кольце	196
2. Краевая задача для уравнения Лапласа в прямоугольнике	200
§ 6. Основы теории потенциала	203
1. Объемный потенциал	203
2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра	204
3. Поверхностные потенциалы	206
4. Непрерывность потенциала простого слоя	209

5. Поверхности Лапунова	211
6. Существование и непрерывность прямых значений потенциала двойного слоя на поверхности	213
7. Разрыв потенциала двойного слоя	214
8. Разрыв нормальной производной потенциала простого слоя	217
§ 7. Метод интегральных уравнений решения краевых задач	220
1. Основные свойства интегральных уравнений	221
2. Интегральное уравнение для внутренней задачи Дирихле	223
3. Интегральное уравнение для внешней задачи Неймана	226
4. Интегральное уравнение для внутренней задачи Неймана и внешней задачи Дирихле	227
Глава VI. Уравнения параболического типа	235
§ 1. Постановка начально-краевой задачи	235
§ 2. Принцип максимума	236
§ 3. Теоремы единственности и устойчивости	240
§ 4. Существование решения уравнения теплопроводности в случае ограниченной области	242
1. Построение формального решения начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями	242
2. Существование классического решения уравнения теплопроводности на отрезке	244
§ 5. Функция Грина	248
§ 6. Неоднородное уравнение теплопроводности и неоднородные граничные условия	251
1. Неоднородное уравнение теплопроводности	251
2. Неоднородное граничное условие	253
§ 7. Задача Коши для уравнения теплопроводности	254
1. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой	254
2. Теорема единственности	254
3. Фундаментальное решение. Интеграл Пуассона	256
4. Свойства фундаментального решения	259
§ 8. Существование решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности	261
1. Теорема существования	261
2. Пример	265
§ 9. Неоднородное уравнение теплопроводности на бесконечной прямой	268
§ 10. Начальная задача для уравнения теплопроводности в пространстве	271
§ 11. Решение уравнения теплопроводности на полупрямой	274
1. Постановка начально-краевых задач	274
2. Однородные граничные условия	275
3. Краевой режим	283
4. Неоднородное граничное условие второго рода	286
§ 12. Формула Грина для уравнения теплопроводности	287
§ 13. Уравнение нелинейной теплопроводности и горения	293
Глава VII. Уравнения гиперболического типа	301
§ 1. Постановка начально-краевой задачи для уравнения колебаний в ограниченной области	301
§ 2. Теорема единственности	302
§ 3. Устойчивость решения	304
§ 4. Существование решения уравнения колебаний в ограниченной области	307

§ 5. Вынужденные колебания ограниченной струны	310
§ 6. Формула Грина для уравнения колебаний	314
§ 7. Уравнение колебаний на неограниченной прямой	317
1. Постановка задачи с начальными условиями для неограниченной струны	317
2. Формула Даламбера	318
3. Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши	319
4. Физическая интерпретация решения	321
5. Колебания струны под действием мгновенного сосредоточенного импульса	326
6. Существование и единственность решения	330
§ 8. Задачи для полуграниченной прямой	331
1. Задачи для однородного уравнения с однородными граничными условиями первого и второго рода	331
2. Распространение краевого режима	334
§ 9. Колебания в неограниченном пространстве	335
1. Сферически-симметричный случай	336
2. Формула Кирхгофа	337
3. Формула Пуассона	342
4. Метод спуска	346
5. Локальные начальные условия	349
6. Установившиеся колебания	351
§ 10. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса)	353
§ 11. Общая задача Коши. Функция Римана	358
§ 12. Нелинейные уравнения	363
1. Простейшие уравнения и метод характеристик	363
2. Обобщенное решение. Условия на разрыве	367
3. Уравнение Кортевега—де Фриза и законы сохранения	370
4. Схема метода обратной задачи	371
5. Солитонные решения	374
Глава VIII. Уравнения эллиптического типа. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца	377
§ 1. Задача Штурма—Лиувилля для оператора Лапласа	377
1. Приведение задачи Штурма—Лиувилля к интегральному уравнению Фредгольма	377
2. Свойства собственных значений и собственных функций	379
§ 2. Свойства решений уравнения Гельмгольца	385
1. Фундаментальные решения уравнения Гельмгольца	385
2. Формулы Грина	390
3. Потенциалы уравнения Гельмгольца	391
4. Принцип максимума для уравнения $\Delta u - \kappa^2 u = 0$	392
§ 3. Внутренние задачи для уравнения Гельмгольца	393
1. Внутренняя задача для уравнения $\Delta u - \kappa^2 u = 0$	393
2. Вторая и третья краевые задачи для уравнения $\Delta u - \kappa^2 u = 0$	394
3. Краевые задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$	396
§ 4. Функция Грина краевых задач для уравнения Гельмгольца	396
§ 5. Задача для уравнения $\Delta u - \kappa^2 u = -f$ в неограниченной области	398
§ 6. Задача для уравнения $\Delta u + k^2 u = -f$ в неограниченной области	399
1. Условия излучения	400
2. Принцип предельного поглощения	406
Литература	410
Дополнение	411