

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Предисловие ко второму изданию . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                      | 9          |
| Введение. Об этой книге. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                              | 10         |
| Обозначения . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 15         |
| <b>Глава 1. Основные понятия теории вероятностей . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                | <b>16</b>  |
| 1.1. Стохастические ситуации и их математические модели . . . . .                                                                                                                                                                                                                                             | 16         |
| 1.2. Случайные величины и их распределения . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                          | 20         |
| 1.3. Числовые характеристики случайных величин. Неравенства для моментов и вероятностей. . . . .                                                                                                                                                                                                              | 28         |
| 1.3.1. Числовые характеристики случайных величин (28). 1.3.2. Основные неравенства. «Правило трех сигм» (36). 1.3.3. Неравенства для вероятностей превышений порогов суммами независимых случайных величин (40).                                                                                              |            |
| 1.4. Производящие и характеристические функции . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                      | 50         |
| 1.5. Сходимость случайных величин и их распределений . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                | 59         |
| 1.6. Центральная предельная теорема, ее уточнения и обобщения . . . .                                                                                                                                                                                                                                         | 64         |
| 1.6.1. Центральная предельная теорема (64). 1.6.2. Неравенство Берри–Эссеена, его уточнения и обобщения (66). 1.6.3. Неравномерные оценки (97). 1.6.4. Устойчивые и безгранично делимые распределения (110).                                                                                                  |            |
| 1.7. Суммы случайных индикаторов. Теорема Пуассона . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | 112        |
| 1.8. Случайные процессы . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                             | 117        |
| <b>Глава 2. Некоторые свойства случайных сумм . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>120</b> |
| 2.1. Элементарные свойства случайных сумм . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                           | 120        |
| 2.2. Пуассоновски-смешанные и обобщенные пуассоновские распределения. . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | 127        |
| 2.3. Дискретные обобщенные пуассоновские распределения . . . . .                                                                                                                                                                                                                                              | 132        |
| 2.3.1. Примеры дискретных обобщенных пуассоновских распределений (132). 2.3.2. Рекуррентные соотношения для дискретных обобщенных пуассоновских распределений (133). 2.3.3. Дискретные безгранично делимые законы как обобщенные пуассоновские распределения (134).                                           |            |
| 2.4. Асимптотическая нормальность пуассоновских случайных сумм . .                                                                                                                                                                                                                                            | 135        |
| 2.4.1. Сходимость распределений пуассоновских случайных сумм к нормальному закону (135). 2.4.2. Неравенство Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм (139). 2.4.3. Нецентральные ляпуновские дроби (143). 2.4.4. Точность нормальной аппроксимации для распределений случайных сумм с безгранично дели- |            |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| мым индексом (148). 2.4.5. Неравенство Берри–Эссеена–Каца для пуассоновских случайных сумм и его неравномерный аналог (166).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |            |
| 2.5. Асимптотические разложения для обобщенных пуассоновских распределений . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 173        |
| 2.6. Асимптотические разложения для квантилей обобщенных пуассоновских распределений . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 182        |
| 2.7. Неравенство Бернштейна–Колмогорова для пуассоновских случайных сумм . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 186        |
| 2.8. Приближение вероятностей больших отклонений пуассоновских сумм с помощью преобразования Эшера . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 188        |
| 2.9. Теорема переноса . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 197        |
| 2.10. Смеси вероятностных распределений . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 202        |
| 2.10.1. Основные определения (203). 2.10.2. Идентифицируемость смесей вероятностных распределений (207).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |            |
| 2.11. Случайные суммы случайных индикаторов. Аналог теоремы Пуассона . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 211        |
| <b>Глава 3. Математические модели страхового риска . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>215</b> |
| 3.1. Модели и задачи теории риска . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 215        |
| 3.2. Основные задачи теории индивидуального риска . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 218        |
| 3.3. Основные задачи теории коллективного риска . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 221        |
| <b>Глава 4. Сравнение рискованных ситуаций и простейшие методы расчета страховых тарифов . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>224</b> |
| 4.1. Рисковые ситуации в страховании . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 224        |
| 4.2. Сравнение рискованных ситуаций . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 226        |
| 4.3. Функции полезности . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 232        |
| 4.4. Страхование с точки зрения клиента . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 234        |
| 4.5. Страхование со стороны страховой компании . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 235        |
| 4.6. Эмпирическое определение функции полезности . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 236        |
| 4.7. Модель Эрроу . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 238        |
| 4.8. Общие принципы расчета тарифных ставок . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 239        |
| <b>Глава 5. Модель индивидуального риска (статическая модель) . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <b>244</b> |
| 5.1. Модели объема страхового портфеля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 244        |
| 5.1.1. Постановка задачи (244). 5.1.2. Выбор модели распределения из класса Каца–Панджера и нормальная аппроксимация составного распределения (246). 5.1.3. Точность нормальной аппроксимации для распределений случайных сумм с индексом из класса Каца–Панджера (250). 5.1.4. Пуассоновско-биномиальная модель распределения целочисленной случайной величины. Нормальная аппроксимация составного распределения (252). 5.1.5. Пуассоновско-биномиальная модель распределения целочисленной случайной величины. Аппроксимация распределения (255). 5.1.6. Обобщенная пуассоновско-биномиальная модель распределения целочисленной случайной величины. Аппроксимация распределений сумм случайного числа случайных индикаторов (262). |            |

|                                                                                                                                                                                                                                                  |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2. Вероятность разорения в модели индивидуального риска. Классическая асимптотическая формула для страховых премий в статической модели страхования. . . . .                                                                                   | 265        |
| 5.3. Факторизационная модель индивидуальных исков и постановка задач, относящихся к статической модели страхования. . . . .                                                                                                                      | 266        |
| 5.3.1. Факторизационная модель (266). 5.3.2. Постановка задачи определения оптимальной страховой ставки (268).                                                                                                                                   |            |
| 5.4. Основные предположения и обозначения в рамках Ф-модели. . . . .                                                                                                                                                                             | 270        |
| 5.5. Простейшая формула для страховой ставки, учитывающая два момента распределения иска, в условиях факторизационной модели                                                                                                                     | 271        |
| 5.6. Асимптотические оценки страховых премий, основанные на нормальной аппроксимации распределения итогового страхового фонда                                                                                                                    | 272        |
| 5.6.1. Общая теорема (273). 5.6.2. Частные случаи распределения объема страхового портфеля (275).                                                                                                                                                |            |
| 5.7. Асимптотические оценки страховой премии, основанные на уточненной нормальной аппроксимации распределения итогового страхового фонда. . . . .                                                                                                | 278        |
| 5.8. Гарантированные (верхние) оценки страховых тарифов в статической модели страхования. . . . .                                                                                                                                                | 285        |
| 5.8.1. Постановка задачи (287). 5.8.2. Верхние оценки страховой ставки для детерминированного объема страхового портфеля (288). 5.8.3. Верхние оценки страховой ставки для объема страхового портфеля, распределенного по закону Пуассона (293). |            |
| 5.9. Доказательства теорем . . . . .                                                                                                                                                                                                             | 297        |
| 5.9.1. Доказательство теоремы 5.8.2 (297). 5.9.2. Доказательство теоремы 5.8.3 (299). 5.9.3. Доказательство теоремы 5.8.5 (304).                                                                                                                 |            |
| 5.10. Аппроксимация необходимого резервного капитала страховой компании, обслуживающей много неоднородных контрактов . . . . .                                                                                                                   | 306        |
| 5.10.1. Вспомогательные утверждения (307). 5.10.2. Основные результаты (309). 5.10.3. Примеры. (311).                                                                                                                                            |            |
| <b>Глава 6. Дискретная динамическая модель коллективного риска</b>                                                                                                                                                                               | <b>313</b> |
| 6.1. Понятие о дискретной динамической модели страхования. . . . .                                                                                                                                                                               | 313        |
| 6.2. Формальная постановка задачи определения минимально допустимой страховой ставки в дискретной динамической модели страхования. . . . .                                                                                                       | 316        |
| 6.3. Оценки страховых ставок в дискретной динамической модели страхования при нормальном распределении дохода за тест-период . . .                                                                                                               | 318        |
| 6.4. Оценки страховых ставок в дискретной динамической модели страхования при равномерно ограниченных страховых суммах . . . . .                                                                                                                 | 320        |
| 6.5. Доказательства теорем . . . . .                                                                                                                                                                                                             | 322        |
| 6.5.1. Доказательство теоремы 6.3.1 (322). 6.5.2. Доказательство теоремы 6.4.1 (323).                                                                                                                                                            |            |
| <b>Глава 7. Модели коллективного риска (динамические модели)</b> . . .                                                                                                                                                                           | <b>325</b> |
| 7.1. Процессы риска Спарре Андерсена. Классический процесс риска. .                                                                                                                                                                              | 325        |
| 7.2. Определение и простейшие свойства пуассоновского процесса. . .                                                                                                                                                                              | 327        |

|                                                                                                                                                                                                                                                    |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.3. Пуассоновский точечный процесс как модель абсолютно хаотичного распределения событий во времени . . . . .                                                                                                                                     | 330        |
| 7.4. Информационные свойства пуассоновского процесса . . . . .                                                                                                                                                                                     | 332        |
| 7.5. Асимптотическая нормальность пуассоновского процесса . . . . .                                                                                                                                                                                | 340        |
| 7.6. Смешанные пуассоновские процессы . . . . .                                                                                                                                                                                                    | 341        |
| 7.6.1. Предварительные сведения (341). 7.6.2. Основные определения (343). 7.6.3. Характеризация смешанных пуассоновских процессов (347). 7.6.4. Смешанные пуассоновские распределения (352). 7.6.5. Примеры смешанных пуассоновских моделей (354). |            |
| 7.7. Определение и простейшие свойства дважды стохастических пуассоновских процессов . . . . .                                                                                                                                                     | 358        |
| 7.8. Общая предельная теорема о сходимости суперпозиций независимых случайных процессов . . . . .                                                                                                                                                  | 363        |
| 7.9. Асимптотические свойства дважды стохастических пуассоновских процессов . . . . .                                                                                                                                                              | 367        |
| 7.10. Распределение суммарных страховых выплат . . . . .                                                                                                                                                                                           | 375        |
| 7.11. Асимптотика распределений суммарных страховых требований в процессах риска Спарре Андерсена . . . . .                                                                                                                                        | 379        |
| 7.12. Асимптотика суммарных страховых требований при неоднородном потоке выплат . . . . .                                                                                                                                                          | 388        |
| <b>Глава 8. Вероятность разорения . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                    | <b>396</b> |
| 8.1. Формула Поллачека–Хинчина–Беекмана для вероятности разорения в классическом процессе риска . . . . .                                                                                                                                          | 396        |
| 8.2. Приближенные формулы для вероятности разорения при малой нагрузке безопасности . . . . .                                                                                                                                                      | 401        |
| 8.3. Асимптотические разложения для вероятности разорения при малой нагрузке безопасности . . . . .                                                                                                                                                | 409        |
| 8.4. Эмпирические аппроксимации для вероятности разорения в классическом процессе риска . . . . .                                                                                                                                                  | 423        |
| 8.4.1. Эмпирическая аппроксимация Де Вилдера (423). 8.4.2. Эмпирическая аппроксимация Беекмана–Бауэrsa (424).                                                                                                                                      |            |
| 8.5. Диффузионная аппроксимация для вероятности разорения в классическом процессе риска . . . . .                                                                                                                                                  | 425        |
| 8.6. Асимптотическая аппроксимация вероятности разорения при большом начальном капитале. Теорема Крамера–Лундберга . . . . .                                                                                                                       | 428        |
| 8.7. Неравенства для вероятности разорения в классическом процессе риска . . . . .                                                                                                                                                                 | 430        |
| 8.7.1. Неравенство Лундберга (430). 8.7.2. Двусторонние оценки для вероятности разорения (434).                                                                                                                                                    |            |
| 8.8. Вероятность разорения за конечное время . . . . .                                                                                                                                                                                             | 436        |
| <b>Глава 9. Обобщенные процессы риска . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                | <b>439</b> |
| 9.1. Определение обобщенных процессов риска . . . . .                                                                                                                                                                                              | 439        |
| 9.2. Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска . . . . .                                                                                                                                                                                | 441        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 9.3. Обобщенные процессы риска при наличии больших выплат . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 447        |
| 9.4. Обобщенные процессы риска с пакетным поступлением страховых требований . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 450        |
| 9.5. Классические процессы риска со случайными премиями. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 452        |
| 9.5.1. Определение и простейшие свойства (452). 9.5.2. Вероятность разорения (453). 9.5.3. Описание модели спекулятивной деятельности пункта обмена валют (455). 9.5.4. Постановка задачи оптимизации спекулятивной прибыли (457). 9.5.5. Решение, основанное на нормальной аппроксимации (459). 9.5.6. Примеры (462). 9.5.7. Решение, основанное на экспоненциальных оценках вероятностей больших отклонений пуассоновских случайных сумм (464).                             |            |
| <b>Глава 10. Стоимостной подход к математическому описанию функционирования страховых компаний . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>470</b> |
| 10.1. Введение. Постановка задачи. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 470        |
| 10.2. Основное уравнение . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 472        |
| 10.3. Оценки для оптимального начального капитала . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 474        |
| 10.4. Нижняя оценка для оптимального начального капитала в условиях равномерно ограниченных страховых выплат . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 482        |
| <b>Глава 11. Статистическое оценивание параметров страховой деятельности . . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>485</b> |
| 11.1. Проблема статистического оценивания распределения страховых выплат. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 485        |
| 11.1.1. Подгонка распределений (486). 11.1.2. Непараметрическое оценивание (486). 11.1.3. Параметрическое оценивание (489). 11.1.4. Наиболее часто употребляемые дискретные распределения и оценки их параметров (491). 11.1.5. Наиболее часто употребляемые непрерывные распределения размера страховой выплаты и оценки их параметров (493). 11.1.6. Критерий согласия хи-квадрат (498). 11.1.7. Критерий согласия Колмогорова (501). 11.1.8. Выбор наилучшей модели (502). |            |
| 11.2. Статистическое оценивание вероятности разорения в классическом процессе риска . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 503        |
| 11.3. Непараметрическая оценка для вероятности разорения в обобщенном процессе риска . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 508        |
| <b>Глава 12. Смешанные гауссовские вероятностные модели рисков ситуаций. . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>519</b> |
| 12.1. Принципы анализа рисков ситуаций с помощью смешанных гауссовских вероятностных моделей . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 519        |
| 12.2. Предельные теоремы для обобщенных процессов Кокса . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 522        |
| 12.2.1. Обобщенные процессы Кокса (522). 12.2.2. Теоремы переноса для обобщенных процессов Кокса (523). 12.2.3. Оценки точности аппроксимации распределений обобщенных процессов Кокса масштабными смесями нормальных законов (526). 12.2.4. Асимптотические разложения для квантилей обобщенных процессов Кокса (535).                                                                                                                                                       |            |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 12.3. Некоторые свойства масштабных смесей нормальных законов . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 537 |
| 12.3.1. Основные определения (537). 12.3.2. Острровершинность масштабных смесей нормальных законов (538). 12.3.3. Масштабные нормальные смеси как сверточные симметризации вероятностных распределений (540). 12.3.4. Масштабные нормальные смеси как рандомизационные симметризации вероятностных распределений (546).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
| 12.4. Предельные теоремы для асимптотически нормальных статистик, построенных по выборкам случайного объема. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 549 |
| 12.4.1. Вспомогательные результаты (552). 12.4.2. От асимптотической нормальности — к распределениям с тяжелыми хвостами (553).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
| 12.5. Анализ случайных рисков с помощью центральных и промежуточных порядковых статистик . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 558 |
| 12.5.1. Асимптотическое распределение выборочных квантилей, построенных по выборке случайного объема (558). 12.5.2. Предельные теоремы для промежуточных порядковых статистик, построенных по выборкам случайного объема (561).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
| 12.6. О распределении Стьюдента как альтернативе нормальному и другим устойчивым законам в статистике. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 563 |
| 12.6.1. Распределение Стьюдента как масштабная смесь нормальных законов (563). 12.6.2. Распределение Стьюдента как асимптотическая аппроксимация (565). 12.6.3. Вспомогательные утверждения (567). 12.6.4. Основные результаты и выводы (569). 12.6.5. Случай малого «числа степеней свободы» (573).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |     |
| 12.7. Распределение Лапласа как альтернатива нормальному закону в задачах теории риска . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 575 |
| 12.7.1. Распределение Лапласа как сверточная симметризация (576). 12.7.2. Распределение Лапласа как рандомизационная симметризация (577). 12.7.3. Распределение Лапласа как смесь (578). 12.7.4. Распределение Лапласа как асимптотическая аппроксимация в схеме случайного суммирования случайных величин (583). 12.7.5. Геометрическая устойчивость распределения Лапласа (585). 12.7.6. Распределение Лапласа как асимптотическая аппроксимация для распределений регулярных статистик, построенных по выборкам случайного объема (586). 12.7.7. Несимметричное распределение Лапласа как асимптотическая аппроксимация в схеме случайного суммирования случайных величин (588). 12.7.8. Экстремальные энтропийные свойства распределения Лапласа (591). |     |
| Список литературы . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 593 |