

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

<b>Предисловие . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1. Векторы на плоскости и в пространстве . . . . .	5
1.1.1. Определение свободного вектора . . . . .	5
1.1.2. Алгебраические операции над векторами . . . . .	6
1.1.3. Разложение вектора по базису . . . . .	7
1.1.4. Система координат на плоскости и в пространстве . . . . .	8
1.2. Линейные пространства . . . . .	9
1.2.1. Определение и примеры линейных пространств . . . . .	9
1.2.2. Понятие и свойства линейной зависимости векторов . . . . .	11
1.2.3. Размерность и базис. Разложение вектора по базису . . . . .	12
1.3. Евклидовы пространства . . . . .	14
1.3.1. Скалярное произведение в линейном пространстве. Длина вектора. Угол между векторами . . . . .	14
1.3.2. Ортонормированный базис . . . . .	15
1.3.3. Скалярное произведение в $L^3$ . . . . .	17
1.4. Векторное и смешанное произведение . . . . .	18
1.4.1. Определение и свойства векторного произведения . . . . .	18
1.4.2. Приложения векторного произведения . . . . .	20
1.4.3. Определение и свойства смешанного произведения . . . . .	20
1.4.4. Приложения смешанного произведения . . . . .	21
1.5. Прямая и гиперплоскость . . . . .	22
1.5.1. Прямая в $R^n$ . . . . .	22
1.5.2. Гиперплоскость в $R^n$ . . . . .	24
1.5.3. Взаимное расположение прямой и гиперплоскости . . . . .	26
1.5.4. Расстояние от точки до гиперплоскости . . . . .	27
1.6. Матрицы и операции над ними . . . . .	28
1.6.1. Основные определения . . . . .	28
1.6.2. Операции над матрицами . . . . .	29
1.6.3. Определитель квадратной матрицы . . . . .	30
1.6.4. Обратная матрица . . . . .	32
1.7. Решение систем линейных уравнений. Основные понятия . . . . .	33
1.7.1. Основные понятия . . . . .	34
1.7.2. Структура общего решения линейной системы . . . . .	35
1.7.3. Правило Крамера решения линейной системы . . . . .	36
1.7.4. Матричный метод . . . . .	37
1.8. Решение линейных систем . . . . .	38
1.8.1. Метод Гаусса практического решения систем линейных уравнений . . . . .	38
1.8.2. Ранг матрицы . . . . .	40
1.8.3. Теорема Кронекера – Капелли . . . . .	41

1.9. Линейные операторы . . . . .	43
1.9.1. Определение и примеры линейных операторов . . . . .	43
1.9.2. Матрица линейного оператора . . . . .	45
1.9.3. Самонапряженный оператор . . . . .	47
1.9.4. Действия над операторами . . . . .	47
1.10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора . . . . .	49
1.10.1. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора . . . . .	49
1.10.2. Условие диагональности линейного оператора . . . . .	51
1.11. Кривые и поверхности второго порядка . . . . .	53
1.11.1. Кривые второго порядка . . . . .	53
1.11.2. Поверхности второго порядка . . . . .	56
1.12. Классификация кривых и поверхностей второго порядка . . . . .	59
1.12.1. Классификация кривых второго порядка . . . . .	59
1.12.2. Классификация поверхностей второго порядка . . . . .	63
<b>Глава 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной . . . . .</b>	<b>64</b>
2.1. Введение в математический анализ . . . . .	64
2.1.1. Множества вещественных чисел . . . . .	64
2.1.2. Понятие предела числовой последовательности . . . . .	66
2.1.3. Арифметические действия с последовательностями, имеющими предел . . . . .	67
2.2. Числовые последовательности . . . . .	68
2.2.1. О неопределенностях . . . . .	68
2.2.2. Монотонные последовательности. Определение . . . . .	69
2.2.3. Число $e$ . . . . .	70
2.2.4. Верхние и нижние грани множеств . . . . .	71
2.2.5. Теорема Больцано – Вейерштрасса . . . . .	72
2.3. Функции. Предел функции . . . . .	72
2.4. Непрерывность функции . . . . .	75
2.4.1. Определения непрерывности функции . . . . .	75
2.4.2. Первый замечательный предел . . . . .	77
2.4.3. Второй замечательный предел . . . . .	77
2.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции . . . . .	78
2.5.1. Бесконечно малые функции и их свойства . . . . .	78
2.5.2. Теоремы о пределах функций . . . . .	80
2.5.3. Бесконечно большие функции . . . . .	82
2.6. Сравнение бесконечно малых . . . . .	83
2.6.1. Сравнение бесконечно малых . . . . .	83
2.6.2. Свойства функций, непрерывных в точке . . . . .	84
2.6.3. Классификация точек разрыва . . . . .	85
2.6.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке . . . . .	86
2.7. Введение в дифференциальное исчисление функций одной переменной. Производная . . . . .	87
2.7.1. Производная . . . . .	87
2.7.2. Механический смысл производной . . . . .	89
2.7.3. Дифференцируемость . . . . .	89

---

2.7.4. Производные элементарных функций . . . . .	90
2.8. Производные сложных, обратных, логарифмических функций . . . . .	92
2.8.1. Производная сложной функции . . . . .	92
2.8.2. Обратная функция . . . . .	93
2.8.3. Производные элементарных функций . . . . .	94
2.8.4. Дифференцирование степенно-показательных выражений . . . . .	95
2.9. Дифференциал . . . . .	95
2.9.1. Дифференциал функции . . . . .	95
2.9.2. Связь между существованием производной и существованием дифференциала функции . . . . .	96
2.9.3. Свойства дифференциала . . . . .	97
2.9.4. Дифференциал сложной функции . . . . .	97
2.9.5. Геометрический смысл дифференциала . . . . .	98
2.9.6. Производные и дифференциалы высших порядков . . . . .	98
2.9.7. Дифференцирование параметрически заданных функций . . . . .	100
2.10. Некоторые теоремы Ролля, Лагранжа, Коши о дифференцируемых функциях . . . . .	100
2.10.1. Теорема Ролля о нулях . . . . .	100
2.10.2. Теорема Лагранжа о конечных приращениях . . . . .	102
2.10.3. Теорема Коши об отношении приращений двух функций . . . . .	103
2.11. Раскрытие неопределенностей . . . . .	104
2.11.1. Правило Лопитали . . . . .	104
2.11.2. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ . . . . .	105
2.11.3. Раскрытие неопределенностей вида $(0 \cdot \infty)$ и $(\infty - \infty)$ . . . . .	106
2.11.4. Раскрытие неопределенностей вида $(0^0)$ , $(\infty^0)$ , $(1^\infty)$ . . . . .	107
2.12. Формула Тейлора и ее приложения . . . . .	108
2.12.1. Формула Тейлора . . . . .	108
2.12.2. Применение формулы Тейлора к вычислению значений функции . . . . .	110
2.12.3. Разложение функций по формуле Тейлора . . . . .	111
2.13. Исследование функций с помощью производных. Возрастание и убывание функций. Исследование функций на экстремум . . . . .	113
2.13.1. Условия возрастания и убывания функций . . . . .	113
2.13.2. Точки экстремума.. Необходимые условия экстремума . . . . .	114
2.13.3. Достаточный признак экстремума . . . . .	115
2.13.4. Достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке 2-й производной . . . . .	116
2.14. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Вогнутость, вогнутость. Точки перегиба . . . . .	116
2.14.1. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке . . . . .	116
2.14.2. Выпуклость и вогнутость графика функции . . . . .	117
2.14.3. Точки перегиба. Необходимое условие существования точек перегиба. Достаточное условие . . . . .	118
2.15. Асимптоты. План исследования функций и построения графиков . . . . .	118
2.15.1. Асимптоты графика функции . . . . .	119

---

2.15.2. Общая схема исследования функции и построения ее графика . . . . .	121
2.15.3. Дифференциал длины дуги . . . . .	122
2.16. Кривизна плоской кривой . . . . .	124
2.16.1. Кривизна . . . . .	124
2.16.2. Вычисление кривизны кривой . . . . .	124
2.16.3. Радиус кривизны. Окружность кривизны. Центр кривизны .	126
2.16.4. Эволюта и эвольвента . . . . .	127
2.17. Комплексные числа . . . . .	128
2.17.1. Комплексные числа. Определение, геометрическое изображение . . . . .	129
2.17.2. Геометрическое изображение комплексных чисел . . . . .	129
2.17.3. Действия над комплексными числами . . . . .	130
2.17.4. Показательная функция в комплексной области . . . . .	131
2.17.5. Некоторые сведения о многочленах . . . . .	132
2.18. Приближенное решение уравнений . . . . .	133
2.18.1. Метод хорд . . . . .	133
2.18.2. Метод касательных (метод Ньютона) . . . . .	135
2.18.3. Комбинированный метод . . . . .	135
2.18.4. Метод итераций . . . . .	136
2.18.5. Фортран-программа вычисления корней заданного уравнения на заданном отрезке . . . . .	137
2.19. Интерполяирование . . . . .	139
2.19.1. Постановки задачи . . . . .	139
2.19.2. Интерполяционный многочлен Лагранжа . . . . .	141
2.19.3. Интерполяционный многочлен Ньютона . . . . .	141
2.19.4. Численные дифференцирование . . . . .	144
<b>Глава 3. Интегральное исчисление функций одной переменной . . . . .</b>	<b>145</b>
3.1. Неопределенный интеграл и его свойства. Основные методы интегрирования . . . . .	145
3.1.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла . . . . .	145
3.1.2. Таблица основных интегралов . . . . .	147
3.1.3. Некоторые свойства неопределенного интеграла . . . . .	148
3.1.4. Основные методы интегрирования . . . . .	148
3.2. Интегрирование по частям. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен . . . . .	149
3.2.1. Интегрирование по частям . . . . .	149
3.2.2. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен . . . . .	151
3.3. Интегрирование рациональных дробей . . . . .	153
3.3.1. Определение рациональной дроби. Интегрирование простейших рациональных дробей . . . . .	153
3.3.2. Разложение рациональной дроби на простейшие . . . . .	156
3.3.3. Метод неопределенных коэффициентов . . . . .	157
3.3.4. Правила интегрирования рациональных дробей . . . . .	157
3.4. Метод Остроградского. Интегралы от иррациональных функций . . . . .	158
3.4.1. Метод Остроградского . . . . .	158

---

3.4.2. Интегралы от некоторых иррациональных функций . . . . .	158
3.5. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка . . . . .	161
3.5.1. Универсальная тригонометрическая подстановка . . . . .	161
3.5.2. Методы интегрирования некоторых специальных классов тригонометрических функций . . . . .	162
3.6. Тригонометрические подстановки . . . . .	165
3.6.1. Тригонометрические подстановки . . . . .	165
3.6.2. О функциях, интегралы которых не выражаются через элементарные функции . . . . .	167
3.7. Определенный интеграл: постановка задачи, существование, свойства . . . . .	168
3.7.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла . . . . .	168
3.7.2. Интегральная сумма. Определенный интеграл . . . . .	169
3.7.3. Теорема существования определенного интеграла . . . . .	170
3.7.4. Свойства определенного интеграла . . . . .	170
3.8. Определенный интеграл: теорема о среднем, формула Ньютона — Лейбница, замена переменной, интегрирование по частям . . . . .	173
3.8.1. Теорема о среднем значении определенного интеграла . . . . .	173
3.8.2. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона — Лейбница . . . . .	174
3.8.3. Замена переменной в определенном интеграле . . . . .	176
3.8.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле . . . . .	177
3.9. Геометрические приложения определенного интеграла . . . . .	178
3.9.1. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах . . . . .	178
3.9.2. Вычисление площадей для случая задания их границ уравнениями в параметрической форме . . . . .	179
3.9.3. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах . . . . .	180
3.10. Вычисление длины дуги кривой . . . . .	181
3.10.1. Вычисление длины дуги в декартовых координатах . . . . .	181
3.10.2. Вычисление длины дуги в случае параметрического задания кривой . . . . .	183
3.10.3. Длина дуги кривой в полярных координатах . . . . .	183
3.11. Вычисление объема. Механические приложения определенного интеграла . . . . .	184
3.11.1. Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям . . . . .	184
3.11.2. Объем тела вращения . . . . .	186
3.11.3. Вычисление работы переменной силы . . . . .	186
3.11.4. Задача на вычисление силы Архимеда . . . . .	187
3.12. Несобственные интегралы . . . . .	188
3.12.1. Интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы первого рода) . . . . .	189
3.12.2. Теоремы сравнения для несобственных интегралов первого рода . . . . .	191

---

3.12.3. Интегралы от неограниченных функций (интегралы второго рода) . . . . .	192
3.12.4. Теоремы сравнения для несобственных интегралов второго рода . . . . .	193
<b>3.13. Приближенные методы вычисления определенных интегралов . . . . .</b>	<b>194</b>
3.13.1. Постановка задачи. Общая идея методов приближенных вычислений . . . . .	194
3.13.2. Формула прямоугольников . . . . .	194
3.13.3. Формула трапеций . . . . .	195
3.13.4. Формула парабол (формула Симпсона) . . . . .	196
<b>Глава 4. Дифференциальное исчисление функций многих переменных . . . . .</b>	<b>198</b>
4.1. Основные понятия и определения. Функции двух переменных и области их определения. График функции двух переменных. Предел и непрерывность . . . . .	198
4.1.1. Функции двух переменных и области их определения . . . . .	199
4.1.2. График функции двух переменных . . . . .	199
4.1.3. Предел и непрерывность . . . . .	200
4.2. Частные производные. Дифференциал . . . . .	202
4.2.1. Свойства непрерывных в замкнутой и ограниченной области функций . . . . .	202
4.2.2. Частные производные первого порядка . . . . .	203
4.2.3. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных . . . . .	204
4.2.4. Полное приращение функции и полный дифференциал . . . . .	204
4.3. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Производные сложных и неявных функций . . . . .	206
4.3.1. Приложение полного дифференциала к приближенным вычислениям . . . . .	206
4.3.2. Дифференцирование сложных функций . . . . .	207
4.3.3. Неявные функции и их дифференцирование . . . . .	210
4.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции двух переменных . . . . .	211
4.4.1. Частные производные высших порядков . . . . .	211
4.4.2. Дифференциалы высших порядков . . . . .	213
4.4.3. Формула Тейлора для функции двух переменных . . . . .	214
4.5. Экстремум функции двух переменных . . . . .	215
4.5.1. Определение экстремума функции двух переменных . . . . .	215
4.5.2. Необходимые условия существования экстремума . . . . .	216
4.5.3. Достаточные условия существования экстремума . . . . .	217
4.5.4. Примеры исследования функций на экстремум . . . . .	217
4.6. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных. Условный экстремум. Необходимые условия . . . . .	219
4.6.1. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в ограниченной замкнутой области . . . . .	219

4.6.2. Пример исследования функции на наибольшее и наименьшее значения . . . . .	220
4.6.3. Условный экстремум. Уравнение связи . . . . .	221
4.6.4. Необходимые условия условного экстремума . . . . .	222
<b>4.7. Достаточные условия существования условного экстремума.</b>	
Метод наименьших квадратов . . . . .	223
4.7.1. Достаточные условия существования условного экстремума . . . . .	223
4.7.2. Пример решения задачи на отыскание условного экстремума . . . . .	224
4.7.3. Метод наименьших квадратов . . . . .	225
<b>4.8. Векторная функция скалярного аргумента . . . . .</b>	228
4.8.1. Задачи, приводящие к понятию векторной функции скалярного аргумента . . . . .	228
4.8.2. Предел и производная векторной функции скалярного аргумента . . . . .	229
4.8.3. Механический смысл первой и второй производных векторной функции скалярного аргумента . . . . .	231
<b>4.9. Геометрический смысл полного дифференциала . . . . .</b>	233
4.9.1. Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой . . . . .	233
4.9.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности . . . . .	234
4.9.3. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных . . . . .	235
<b>Глава 5. Интегральное исчисление функций многих переменных . . . . .</b>	237
<b>5.1. Интегралы, зависящие от параметра . . . . .</b>	237
5.1.1. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра. Формула Лейбница . . . . .	237
5.1.2. Применение интегралов, зависящих от параметра к вычислению некоторых «неберущихся» интегралов . . . . .	239
5.1.3. Интегрирование по параметру интегралов, зависящих от параметра . . . . .	240
<b>5.2. Интеграл Пуассона. Гамма-функция . . . . .</b>	241
5.2.1. Интеграл Пуассона . . . . .	241
5.2.2. Гамма-функция и ее свойства . . . . .	242
<b>5.3. Двойной интеграл . . . . .</b>	245
5.3.1. Задача об объеме, приводящая к понятию двойного интеграла . . . . .	245
5.3.2. Определение двойного интеграла. Теорема существования . . . . .	246
5.3.3. Свойства двойного интеграла . . . . .	247
5.3.4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах . . . . .	248
<b>5.4. Замена переменных в двойном интеграле . . . . .</b>	250
5.4.1. Замена переменных в двойном интеграле . . . . .	250
5.4.2. Двойной интеграл в полярных координатах . . . . .	253
<b>5.5. Приложения двойного интеграла . . . . .</b>	254
5.5.1. Масса плоской фигуры . . . . .	254
5.5.2. Статические моменты, центр тяжести плоской фигуры . . . . .	255

5.5.3. Площадь поверхности . . . . .	257
5.6. Тройной интеграл . . . . .	258
5.6.1. Определение тройного интеграла. Теорема существования . . . . .	258
5.6.2. Свойства тройного интеграла . . . . .	259
5.6.3. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах . . . . .	260
5.6.4. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах . . . . .	261
5.6.5. Тройной интеграл в сферических координатах . . . . .	262
5.7. Приложения тройного интеграла . . . . .	263
5.7.1. Вычисление объема тела . . . . .	263
5.7.2. Вычисление массы тела . . . . .	263
5.7.3. Статические моменты и центр тяжести тела . . . . .	264
5.8. Криволинейный интеграл второго рода. . . . .	266
5.8.1. Задачи, приводящие к криволинейному интегралу . . . . .	266
5.8.2. Определение криволинейного интеграла. Теорема существования . . . . .	267
5.8.3. Вычисление криволинейного интеграла . . . . .	268
5.8.4. Свойства криволинейного интеграла . . . . .	269
5.9. Формула Грина – Остроградского. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования . . . . .	270
5.9.1. Формула Остроградского – Грина . . . . .	270
5.9.2. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования . . . . .	272
5.10. Криволинейный и поверхностный интегралы первого рода . . . . .	275
5.10.1. Криволинейный интеграл по длине дуги. Вычисление массы кривой . . . . .	275
5.10.2. Интеграл по площади поверхности (поверхностный интеграл первого рода) . . . . .	276
5.10.3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода . . . . .	277
5.11. Поверхностные интегралы второго рода . . . . .	279
5.11.1. Задача о потоке жидкости через поверхность . . . . .	279
5.11.2. Определение поверхностного интеграла второго рода . . . . .	280
5.11.3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода . . . . .	281
<b>Глава 6. Элементы теории поля . . . . .</b>	<b>283</b>
6.1. Скалярное поле . . . . .	283
6.1.1. Определение и примеры скалярных полей . . . . .	283
6.1.2. Производная по направлению . . . . .	284
6.1.3. Градиент скалярного поля . . . . .	286
6.1.4. Градиент функции перпендикулярен к поверхности уровня . . . . .	287
6.2. Векторное поле . . . . .	288
6.2.1. Определение векторного поля . . . . .	288
6.2.2. Векторные линии . . . . .	288
6.2.3. Формула Остроградского – Гаусса . . . . .	289
6.2.4. Дивергенция векторного поля и ее физический смысл . . . . .	289
6.3. Формула Стокса. Ротор и циркуляция векторного поля. Оператор Гамильтона . . . . .	292

---

6.3.1. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования . . . . .	292
6.3.2. Ротор и циркуляция векторного поля. Векторная запись формулы Стокса . . . . .	293
6.3.3. Оператор Гамильтона и его применение . . . . .	295
6.4. Потенциальное и соленоидальное поля. Уравнение Лапласа . . . . .	297
6.4.1. Потенциальное поле. Отыскание потенциала . . . . .	297
6.4.2. Соленоидальное поле . . . . .	299
6.4.3. Уравнение Лапласа . . . . .	301
<b>Глава 7. Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . .</b>	<b>302</b>
7.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.	
Дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	302
7.1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям . . . . .	302
7.1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	303
7.1.3. Задача Коши. Теорема Коши . . . . .	305
7.1.4. Общее решение . . . . .	306
7.1.5. Особые решения . . . . .	306
7.2. Методы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	307
7.2.1. Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	307
7.2.2. Однородные уравнения . . . . .	308
7.2.3. Линейные уравнения 1-го порядка . . . . .	311
7.3. Методы интегрирования некоторых дифференциальных уравнений первого порядка. Приближенное решение дифференциальных уравнений методом Эйлера . . . . .	313
7.3.1. Уравнение Бернуlli . . . . .	313
7.3.2. Уравнение в полных дифференциалах . . . . .	314
7.3.3. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера . . . . .	316
7.4. Дифференциальные уравнения высших порядков . . . . .	317
7.4.1. Дифференциальное уравнение $n$ -го порядка. Задача Коши, теорема Коши, общее решение . . . . .	317
7.4.2. Интегрирование уравнений, допускающих понижение порядка . . . . .	319
7.5. Линейные дифференциальные уравнения . . . . .	321
7.5.1. Линейные уравнения $n$ -го порядка. Теорема Коши . . . . .	321
7.5.2. Линейное однородное уравнение второго порядка. Свойства его решений . . . . .	322
7.5.3. Линейные неоднородные уравнения . . . . .	322
7.5.4. Метод вариации произвольных постоянных . . . . .	323
7.6. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	325
7.6.1. Характеристическое уравнение . . . . .	325
7.6.2. Случай различных корней характеристического уравнения . . . . .	325

7.6.3. Случай кратных корней характеристического уравнения . . . . .	326
7.6.4. Случай комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения . . . . .	326
7.6.5. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и специальными правыми частями . . . . .	328
7.6.6. Уравнение гармонического осциллятора. Резонанс . . . . .	329
<b>7.7. Системы дифференциальных уравнений . . . . .</b>	<b>330</b>
7.7.1. Система в нормальной форме. Общее решение . . . . .	330
7.7.2. Решение системы сведений ее к уравнению высшего порядка. Обратное сведение . . . . .	332
7.7.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами . . . . .	334
7.7.4. Построение фундаментальной системы решений. Метод Эйлера . . . . .	335
<b>7.8. Линейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Метод скалярной прогонки . . . . .</b>	<b>338</b>
7.8.1. Вводные замечания и постановка задачи . . . . .	338
7.8.2. Конечно-разностный метод прогонки . . . . .	339
7.8.3. Фортран-программа решения краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка методом прогонки . . . . .	342
<b>7.9. Системы линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Метод матричной прогонки . . . . .</b>	<b>345</b>
7.9.1. Постановка задачи. Уравнения и граничные условия . . . . .	345
7.9.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений и граничных условий . . . . .	346
7.9.3. Решение конечно-разностных уравнений методом матричной прогонки . . . . .	348
7.9.4. Фортран-подпрограмма вычисления обратной матрицы . . . . .	350
<b>Глава 8. Числовые и функциональные ряды . . . . .</b>	<b>354</b>
8.1. Числовые ряды. Определение, свойства, сходимость . . . . .	354
8.1.1. Определение числового ряда . . . . .	354
8.1.2. Сумма числового ряда, его сходимость . . . . .	355
8.1.3. Геометрическая прогрессия . . . . .	355
8.1.4. Простейшие свойства числовых рядов . . . . .	356
8.1.5. Необходимый признак сходимости рядов . . . . .	358
8.2. Признаки сходимости знакоположительных рядов . . . . .	359
8.2.1. Признак сравнения рядов . . . . .	359
8.2.2. Признак Даламбера . . . . .	361
8.2.3. Признак Коши . . . . .	362
8.2.4. Интегральный признак сходимости Коши . . . . .	363
8.3. Знакопеременные ряды . . . . .	364
8.3.1. Знакочередующиеся ряды . . . . .	364
8.3.2. Общий случай знакопеременных рядов . . . . .	365
8.3.3. Остаток ряда . . . . .	367
8.3.4. Оценка остатка знакоположительного ряда . . . . .	367

8.3.5. Оценка остатка знакопеременного ряда . . . . .	368
8.3.6. Оценка остатка знакочередующегося ряда, сходящегося по признаку Лейбница . . . . .	369
<b>8.4. Функциональные ряды . . . . .</b>	<b>370</b>
8.4.1. Понятие функционального ряда, его области сходимости, суммы . . . . .	370
8.4.2. Мажорируемые функциональные ряды и их свойства . . . . .	371
8.4.3. Степенные ряды. Интервал сходимости . . . . .	372
8.4.4. Свойства степенных рядов . . . . .	374
<b>8.5. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена . . . . .</b>	<b>375</b>
8.5.1. Степенной ряд по степеням $(x - a)$ . . . . .	375
8.5.2. Ряд Тейлора . . . . .	376
8.5.3. Вывод формулы остаточного члена. Ряд Маклорена . . . . .	378
8.5.4. Разложение функции $e^x$ в ряд Маклорена . . . . .	379
<b>8.6. Разложение некоторых функций в степенные ряды. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям . . . . .</b>	<b>380</b>
8.6.1. Разложение в ряд Маклорена функций $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x$ . . . . .	380
8.6.2. Биномиальный ряд . . . . .	381
8.6.3. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \ln(1 + x)$ . . . . .	381
8.6.4. Методы, применяемые для разложения функций в степенные ряды . . . . .	382
8.6.5. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях . . . . .	383
<b>8.7. Ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье с периодом <math>2\pi</math> . . . . .</b>	<b>386</b>
8.7.1. Постановка задачи. Некоторые вспомогательные утверждения . . . . .	386
8.7.2. Определение коэффициентов ряда Фурье . . . . .	388
8.7.3. Условия сходимости. Теорема Дирихле . . . . .	388
<b>8.8. Ряды Фурье для четных и нечетных функций, для функций с периодом <math>2l</math>, для непериодических функций . . . . .</b>	<b>390</b>
8.8.1. Ряды Фурье для четных и нечетных функций . . . . .	390
8.8.2. Разложение функции в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ . . . . .	392
8.8.3. Ряд Фурье для непериодической функции . . . . .	394
8.8.4. Возможности применения рядов Фурье к решению дифференциальных уравнений и краевых задач . . . . .	395
<b>Глава 9. Методы математического моделирования физических процессов . . . . .</b>	<b>398</b>
<b>9.1. Вывод дифференциального уравнения поперечных колебаний балки. Границные и начальные условия . . . . .</b>	<b>400</b>
9.1.1. Основные предпосылки теории изгиба балок . . . . .	400
9.1.2. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки . . . . .	403
9.1.3. Границные и начальные условия . . . . .	405
<b>9.2. Поперечные колебания струны. Метод Фурье. Частоты и формы колебаний . . . . .</b>	<b>406</b>
9.2.1. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны. Начальные и граничные условия . . . . .	406
9.2.2. Решение задачи методом Фурье. Формы и частоты поперечных колебаний . . . . .	407

9.2.3. Бесконечная струна. Метод Даламбера. Бегущие волны . . . . .	409
9.2.4. Конечная струна. Бегущие волны . . . . .	410
9.2.5. Колебания струны под действием заданного начального импульса . . . . .	414
9.3. Поперечные колебания балки. Общая схема расчета свободных колебаний балки. Примеры . . . . .	416
9.3.1. Постановка задачи и общая схема расчета свободных поперечных колебаний балки . . . . .	416
9.3.2. Расчет частот поперечных колебаний консольной балки с упругой опорой на втором конце . . . . .	420
9.4. Устойчивость прямолинейных форм равновесия при сжатии. Динамический критерий устойчивости. Примеры . . . . .	425
9.4.1. Постановка задачи и общая схема расчета. Примеры . . . . .	425
9.4.2. Исследование устойчивости стержня под действием следящей силы . . . . .	431
9.4.3. Исследование устойчивости стержня-стойки под действием вертикальной силы . . . . .	434
9.5. Критическая скорость вращения вала. Динамический критерий устойчивости. Примеры . . . . .	435
9.6. Гидравлический удар в трубах. Метод интегрального преобразования Лапласа . . . . .	441
9.6.1. Операционный метод на основе преобразования Лапласа . . . . .	441
9.6.2. Постановка краевых задач гидравлического удара . . . . .	444
9.6.3. Решение краевых задач операционным методом . . . . .	446
9.6.4. Анализ полученных результатов . . . . .	449
9.7. Задачи теплопроводности. Уравнения параболического типа . . . . .	454
9.7.1. Постановка задач. Уравнение и граничные условия . . . . .	454
9.7.2. Применение операционного метода к решению задач теплопроводности . . . . .	457
9.8. Расчет нестационарных одномерных температурных полей методом прогонки . . . . .	461
9.8.1. Решение дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и произвольными граничными условиями методом прогонки . . . . .	461
9.8.2. Алгоритм расчета температурных полей . . . . .	464
9.8.3. Фортран-программа решения краевой задачи с дифференциальным уравнением 2-го порядка . . . . .	466
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>469</b>