

Оглавление

Предисловие	10
Часть I. Введение в линейную алгебру. Элементы общей алгебры	15
Глава I. Системы линейных алгебраических уравнений и матрицы	15
§ 1. Системы линейных алгебраических уравнений и их решение методом исключения неизвестных	15
1. Основные соглашения	15
2. Равносильные системы уравнений	17
3. Метод исключения неизвестных (метод Жордана-Гаусса) — примеры	19
4. Метод исключения неизвестных (метод Жордана-Гаусса) — общая схема	25
5. Однородные системы линейных алгебраических уравнений	30
§ 2. Матрицы; сложение и умножение на число	30
1. Строки и столбцы	30
2. Линейные комбинации строк (столбцов)	33
3. Матрицы	34
4. Транспонированная матрица	36
5. Некоторые виды матриц	37
§ 3. Умножение матриц	40
1. Произведение матрицы на столбец	40
2. Свойства произведения матрицы на столбец	42
3. Умножение матриц	44
4. Техника умножения матриц	45
5. Умножение строки на матрицу	46
6. Замечание о произведении строки на столбец	48
7. Столбцы и строки произведения матриц	49
8. Свойства операции умножения матриц	50
9. Перестановочные матрицы	51
10. Транспонирование произведения матриц	52
11. Многочлен от квадратной матрицы	53
Глава II. Группы, кольца, поля	55
§ 4. Начальные понятия теории множеств	55
1. Множество и его подмножества	55
2. Операции над множествами	57
3. Отображения множеств	59
4. Обратное отображение	60
§ 5. Алгебраические операции	61
1. Декартово произведение множеств	61
2. Понятие алгебраической операции	62
3. Обратимость бинарной алгебраической операции	64
§ 6. Группы	68
1. Определение и примеры	68
2. Группа взаимно однозначных отображений множества на себя	70

3.	Примеры групп в геометрии	72
4.	Группа подстановок	74
5.	Обращение групповой операции	76
6.	Несколько тождеств	76
§ 7.	Кольца и поля	77
1.	Понятие кольца	77
2.	Некоторые свойства колец	79
3.	Понятие поля	81
4.	Примеры полей	82
5.	Операции над дробями в поле	83
6.	Кратные и степени элемента поля	84
§ 8.	Комплексные числа	88
1.	Интуитивные представления о комплексных числах	88
2.	Формальное построение поля комплексных чисел	90
3.	Алгебраическая форма комплексных чисел	93
4.	Модуль и аргумент комплексного числа	95
5.	Сопряжённые числа	98
6.	Уравнение $z^n = u$	99
7.	Заключительные замечания	101
§ 9.	Многочлены над полем комплексных чисел	102
1.	Кольцо многочленов	102
2.	Основная теорема алгебры многочленов	103
3.	Теорема Безу	104
4.	Разложение многочлена на линейные множители	104
5.	Теорема Виета	107
6.	Наибольший общий делитель многочленов	108
7.	Многочлены с вещественными коэффициентами	109
Часть II. Элементарное изложение основ линейной алгебры		111
Глава III. Линейное пространство		111
§ 10.	Понятие линейного пространства	111
1.	Аксиомы линейного пространства	111
2.	Примеры линейных пространств	112
3.	Несколько тождеств	116
§ 11.	Линейная независимость системы векторов	117
1.	Основное определение	117
2.	Примеры	118
3.	Несколько общих утверждений	120
4.	Линейная оболочка векторов	122
§ 12.	Конечномерные линейные пространства	124
1.	n -мерное линейное пространство и его базисы	124
2.	Аннулирующий многочлен квадратной матрицы	127
3.	Дополнение системы линейно независимых векторов до базиса пространства	128
4.	Координаты вектора в данном базисе	128
5.	Об одном условии равенства матриц	132
6.	Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса к другому	133
§ 13.	Подпространства линейного пространства	134
1.	Определение и примеры	134
2.	Простейшие свойства подпространств	137
3.	Сумма и пересечение линейных подпространств	137
4.	Размерность сумм подпространств	139

§ 14. Прямая сумма подпространств	142
1. Определение прямой суммы подпространств	142
2. Сумма и пересечение m подпространств	143
3. Основной результат	146
4. Дополнительное подпространство	146
§ 15. Изоморфизм линейных пространств	147
1. Определение изоморфных пространств	147
2. Критерий изоморфности конечномерных линейных пространств	149
§ 16. Ранг матрицы	150
1. Образ и ядро матрицы	150
2. Определение ранга матрицы	152
3. Нахождение ранга матрицы с помощью её элементарных преобразований	154
4. Ранг произведения матриц	156
§ 17. Основные положения общей теории систем линейных алгебраических уравнений	157
1. Предварительные замечания	157
2. Теорема Кронекера-Капелли	157
3. Альтернатива Фредгольма	158
4. Общее решение однородной системы линейных алгебраических уравнений	160
5. Общее решение совместной неоднородной системы линейных алгебраических уравнений	161
6. Заключительная теорема	162
Глава IV. Определители	163
§ 18. Формы над линейным пространством	163
1. Пространство линейных форм	163
2. Полилинейные формы	166
3. Симметрические и кососимметрические формы	167
§ 19. Что такое определитель	169
1. Правило Крамера для системы двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными	169
2. Характеристические свойства определителя 2-го порядка	171
3. Основное определение	173
4. Корректность основного определения	175
5. Несколько замечаний	179
6. Определитель транспонированной матрицы	181
7. Определители с комплексными элементами	183
§ 20. Элементарные преобразования определителя	184
1. Определитель треугольной матрицы	184
2. Элементарные преобразования определителя	184
3. Критерий равенства определителя нулю	186
4. Ранг матрицы и её миноры	187
5. Базисные миноры	189
§ 21. Определитель произведения матриц	189
1. Теорема об умножении определителей	189
2. Формула Бине-Коши	190
§ 22. Разложение определителя по строкам (столбцам)	192
1. Теорема Лапласа	192
2. Разложение определителя по строке (столбцу)	194
3. Определитель Вандермонда	196

4.	Присоединенная матрица	198
5.	Правило Крамера	199
§ 23.	Обратная матрица	200
1.	Определение и формула для вычисления обратной матрицы	200
2.	Обращение матриц методом Жордана-Гаусса	203
3.	Основные тождества, связанные с обращением матриц	204
4.	Примеры простейших матричных уравнений	204
5.	Об одном свойстве ранга матрицы	206
§ 24.	Некоторые разложения матриц	207
1.	Об одном представлении произвольной матрицы	207
2.	Эквивалентные матрицы	210
3.	Скелетное разложение матрицы	211
§ 25.	Собственные векторы и собственные значения квадратной матрицы	214
1.	Основные соглашения	214
2.	Отыскание собственных значений и собственных векторов заданной матрицы	216
Глава V.	Геометрия линейных пространств	221
§ 26.	Евклидово пространство	221
1.	О длинах и углах	221
2.	Определение скалярного произведения векторов	222
3.	Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом пространстве	225
4.	Длины и углы в евклидовом пространстве	226
5.	Неравенство Коши - Буняковского	227
6.	Неравенства треугольника	229
§ 27.	Ортонормированные базисы	230
1.	Ортогональные векторы	230
2.	Метод ортогонализации	231
3.	Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе	234
4.	Евклидов изоморфизм	234
5.	О симметрических и кососимметрических матрицах	235
§ 28.	Ортогональные матрицы	237
1.	Определение и простейшие свойства	237
2.	Основное свойство ортогональных матриц	239
3.	Произведение ортогональных матриц	240
§ 29.	Подпространства евклидова пространства	241
1.	Ортогональные подпространства и их сумма	241
2.	Ортогональное дополнение подпространства	243
3.	Геометрическая интерпретация теоремы Фредгольма	244
§ 30.	Метод наименьших квадратов	245
1.	Проекция вектора на подпространство	245
2.	Нормальная система уравнений	246
3.	Проектирование в элементарном евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$	248
4.	Матрица проектирования	249
§ 31.	Унитарное пространство	250
1.	Определение унитарного пространства	250
2.	О длинах и углах в унитарном пространстве	251
3.	Комплексные матрицы	252

Часть III. Углублённое изложение линейной алгебры	255
Глава VI. Линейные операторы	255
§ 32. Линейные отображения линейных пространств	255
1. Исходные соглашения	256
2. Образ и ядро линейного оператора	258
3. Пространство линейных операторов	259
4. Умножение операторов	260
5. Обратный оператор	263
§ 33. Матрицы и линейные операторы	263
1. Матрица линейного оператора	265
2. Примеры	272
3. Изоморфизм пространства линейных операторов и пространства матриц	273
4. Ранг и дефект оператора	274
5. Произведение операторов и его матрица	274
6. Матрица обратного оператора	275
§ 34. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису	275
1. Основные соглашения	276
2. Подобные матрицы	279
3. Инвариантные подпространства	279
4. Упрощение матрицы линейного оператора в случае известного инвариантного подпространства	280
§ 35. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора	280
1. Определение и примеры	281
2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора и его матрицы в данном базисе	282
3. Характеристический многочлен линейного оператора	283
4. Индуцированный оператор	284
5. Собственное подпространство	286
6. Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям	288
7. Линейные операторы в вещественном пространстве	289
8. Операторный многочлен	291
9. Собственные векторы и собственные значения обратного оператора	291
10. Треугольный вид линейного оператора в комплексном пространстве	294
§ 36. Диагонализируемые матрицы	294
1. Оператор простой структуры	295
2. Диагонализируемые матрицы и их приведение к диагональному виду	297
3. Примеры	299
Глава VII. Жорданова нормальная форма матрицы	299
§ 37. Обзор основных результатов	299
1. Жордановы матрицы	301
2. Основной результат	302
3. Критерий подобия матриц	303
§ 38. Корневые подпространства	303
1. Собственное и соответствующее корневое подпространства линейного оператора	303

2.	Некоторые свойства корневого подпространства	304
3.	Разложение конечномерного пространства в прямую сумму корневых подпространств	307
4.	Теорема Кэли–Гамильтона	308
§ 39.	Корневые базисы	309
1.	Относительная линейная независимость векторов и относительный базис	309
2.	Построение корневого базиса	312
§ 40.	Инвариантные множители	314
1.	Инварианты подобных матриц	314
2.	Несколько простых лемм	316
3.	Наибольшие общие делители миноров жордановой нормальной матрицы	317
4.	Инвариантные множители	318
5.	Условие подобия матриц	319

Глава VIII. Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах 321

§ 41.	Понятие сопряженного оператора	321
1.	Существование, единственность и природа сопряжен- ного оператора	321
2.	Несколько тождеств	322
3.	Альтернатива Фредгольма	323
§ 42.	Нормальные операторы и матрицы	325
1.	Простейшие операторы в унитарном пространстве	325
2.	Несколько вспомогательных утверждений	327
3.	Доказательство теоремы 42.2	329
4.	Некоторые свойства нормальных операторов	330
5.	Собственные подпространства нормального оператора	332
6.	Спектральная теорема	333
§ 43.	Самосопряженные операторы и матрицы	335
1.	Собственные значения самосопряженного оператора	335
2.	Некоторые свойства симметрических операторов и матриц	337
3.	Основное свойство самосопряженных операторов и матриц	339
4.	Спектральная теорема	340
5.	Собственные подпространства симметрического опе- ратора	340
6.	Положительно определенные операторы	341
7.	Квадратный корень из неотрицательно определенно- го оператора	343
§ 44.	Унитарные и ортогональные операторы	346
1.	Определение и простейшие свойства	346
2.	Унитарные (ортогональные) операторы как операторы нормальные	349
3.	Структура ортогонального оператора в конечномер- ном евклидовом пространстве	350
§ 45.	Некоторые разложения линейных операторов и матриц	354
1.	Сингулярные базисы	354
2.	Сингулярное разложение матрицы	357
3.	Выражение произвольного линейного оператора че- рез эрмитовы операторы	359
4.	Полярное разложение	360

§ 46. Псевдообращение операторов и матриц	361
1. Оператор ортогонального проектирования	361
2. Обобщенные решения уравнения $Ax = y$	363
3. Выражение нормального решения через векторы сингулярных базисов	365
4. Псевдообратный оператор	366
5. Оператор AA^+	367
6. Несколько тождеств	368
7. Псевдообратная матрица	368
8. Псевдообращение диагональных матриц	371
9. Псевдообращение матрицы с помощью её сингулярного разложения	371
10. Псевдообращение матрицы полного ранга	373
11. Псевдообращение матрицы с помощью её скелетного разложения	374
12. Общее решение уравнения $Ax = b$	375
13. Заключительные замечания	376

Глава IX. Билинейные и квадратичные формы 377

§ 47. Билинейные формы над вещественным пространством	377
1. Матрица билинейной формы в данном базисе	377
2. Пространство билинейных форм	378
3. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе от одного базиса к другому	378
4. Конгруэнтные матрицы	379
5. Симметрические и кососимметрические билинейные формы	380
§ 48. Квадратичные формы на вещественном пространстве	381
1. Квадратичная форма и её матрица в данном базисе	381
2. Канонический вид квадратичной формы	384
3. Нормальный вид квадратичной формы	386
4. Инварианты квадратичной формы	387
§ 49. Приведение квадратичной формы к каноническому виду путём элементарных преобразований её матрицы	389
1. Предварительные замечания	389
2. Общая схема преобразований	391
3. Первый шаг алгоритма	394
4. Примеры	396
5. Об одном частном случае	399
§ 50. Определённые квадратичные формы	399
1. Основные соглашения	399
2. Критерий положительной определённости матрицы	400
3. Несколько замечаний	401
4. Одновременное приведение к каноническому виду двух квадратичных форм	402
§ 51. Формы над комплексным пространством	403
1. Билинейные формы	405
2. Квадратичные формы	406
3. Положительно определённые эрмитовы формы	406

407

Предметный указатель

415

Литература