

Оглавление

§1. От редакторов	9
1.1. Зачем и для кого эта книга	9
1.2. Изучение путём решения и обсуждения задач	9
1.3. Как устроена книга	11
1.4. Напутствие. <i>А. Я. Канель-Белов</i>	11
1.5. О литературе и источниках	12
1.6. Благодарности и сведения об авторах	12
1.7. Важные соглашения	13
1.8. Основные обозначения	14
Глава 1. Теория чисел, алгебра и анализ. А. Б. Скопенков	
§2. Делимость и деление с остатком	17
2.1. Делимость (1)	17
2.2. Простые числа (1)	20
2.3. НОД и НОК (1)	22
2.4. Деление с остатком и сравнения (1)	24
2.5. Линейные диофантовы уравнения (2)	25
2.6. Каноническое разложение (2*)	28
2.7. Целые точки под прямой (2*)	30
§3. Умножение по простому модулю	33
3.1. Малая теорема Ферма (2)	33
3.2. Проверка простоты (3*). <i>С. В. Конягин</i>	35
3.3. Квадратичные вычеты (2*)	37
3.4. Квадратичный закон взаимности (3*)	39
3.5. Первообразные корни (3*)	42
3.6. Высокие степени (3*). <i>А. Я. Канель-Белов, А. Б. Скопенков</i>	43
§4. Многочлены и комплексные числа	46
4.1. Рациональные и иррациональные числа (1)	46
4.2. Решение уравнений 3-й и 4-й степени (2)	49
4.3. Теорема Безу и её следствия (2)	54
4.4. Делимость для многочленов (3*). <i>А. Я. Канель-Белов, А. Б. Скопенков</i>	56
4.5. Применения комплексных чисел (3*)	58
4.6. Теорема Виета и симметрические многочлены (3*)	61
4.7. Диофантовы уравнения и гауссовы числа (4*). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	62
4.8. Диагонали правильных многоугольников (4*). <i>И. Н. Шнурников</i>	65
§5. Разрешимость в радикалах	69
5.1. Введение	69
5.1.1. О чём этот параграф	69

5.1.2.	Разрешимость в квадратных радикалах: формулировки (1)	70
5.1.3.	Неразрешимость в радикалах: формулировки (2)	72
5.1.4.	План параграфа	74
5.2.	Важные отступления	74
5.2.1.	Чем интересны приводимые доказательства	74
5.2.2.	Исторические комментарии	76
5.2.3.	Связь с построениями циркулем и линейкой (1)	76
5.3.	Доказательство построимости в теореме Гаусса	77
5.3.1.	Переформулировка построимости в теореме Гаусса (2)	77
5.3.2.	Метод резольвент Лагранжа (2)	78
5.3.3.	Доказательство построимости в теореме Гаусса (3)	82
5.3.4.	Эффективные доказательства построимости (4*)	83
5.4.	Задачи о неразрешимости в радикалах	90
5.4.1.	Одно извлечение квадратного корня (1)	90
5.4.2.	Одно извлечение корня четвёртой степени (2*)	94
5.4.3.	Несколько извлечений квадратных корней (3*)	96
5.4.4.	К доказательству непостроимости в теореме Гаусса (4*)	98
5.4.5.	Одно извлечение корня третьей степени (2)	99
5.4.6.	Одно извлечение корня простой степени (3*)	104
5.4.7.	Несколько извлечений корней (4*)	108
5.5.	Доказательства неразрешимости в радикалах	109
5.5.1.	Лемма о калькуляторе и понятие поля (2*)	109
5.5.2.	Доказательство непостроимости в теореме Гаусса (3*)	109
5.5.3.	Доказательство неразрешимости в вещественных радикалах (3*)	111
5.5.4.	Доказательство неразрешимости в радикалах (4*)	113
5.5.5.	Доказательство сильной вещественной теоремы о неразрешимости (4*)	117
§6.	Неравенства	122
6.1.	В направлении неравенства Йенсена (2)	123
6.2.	Некоторые основные неравенства (2)	127
6.3.	Применения основных неравенств (3*). <i>М. А. Берштейн</i>	129
6.4.	Геометрическая интерпретация (3*)	135
§7.	Последовательности и пределы	138
7.1.	Конечные суммы и разности (3)	138
7.2.	Линейные рекурренты (3)	141
7.3.	Конкретная теория пределов (4*)	143
7.4.	Как компьютер вычисляет корень? (4*) <i>А. С. Воронцов, А. И. Сгибнев</i>	145
7.5.	Методы суммирования рядов (4*)	148
7.6.	Сходимость рядов (4*)	151
7.7.	Примеры трансцендентных чисел (3*)	154
§8.	Функции	156

8.1.	График кубического многочлена (2)	156
8.2.	Элементы анализа для многочленов (2)	159
8.3.	Число корней многочлена (3*)	161
8.4.	Оценки и неравенства (4*). <i>В. А. Сендеров</i>	164
8.5.	Применение существования экстремума (4*). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	165
8.6.	Применения компактности (4*). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	167
Глава 2. Геометрия		
§ 9.	Треугольник	172
9.1.	Принцип Карно (1). <i>В. Ю. Протасов, А. А. Гаврилюк</i>	172
9.2.	Центр вписанной окружности (2). <i>В. Ю. Протасов</i>	175
9.3.	Прямая Эйлера (2). <i>В. Ю. Протасов</i>	177
9.4.	Формула Карно (2*). <i>А. Д. Блинков</i>	179
9.5.	Ортоцентр, ортотреугольник и окружность девяти точек (2). <i>В. Ю. Протасов</i>	182
9.6.	Несколько неравенств, связанных с треугольником (3*). <i>В. Ю. Протасов</i>	184
9.7.	Биссектрисы, высоты и описанная окружность (2). <i>П. А. Кожевников</i>	186
9.8.	«Полувписанная» окружность (2*). <i>П. А. Кожевников</i>	190
9.9.	Обобщённая теорема Наполеона (2*). <i>П. А. Кожевников</i>	196
9.10.	Изогональное сопряжение и прямая Симсона (3*). <i>А. В. Акупян</i>	202
§ 10.	Окружность	212
10.1.	Простейшие свойства окружности (1). <i>А. Д. Блинков</i>	212
10.2.	Вписанный угол (1). <i>А. Д. Блинков, Д. А. Пермяков</i>	216
10.3.	Вписанные и описанные окружности (2). <i>А. А. Гаврилюк</i>	220
10.4.	Радиальная ось (2). <i>И. Н. Шнурников, А. И. Засорин</i>	221
10.5.	Касание (2). <i>И. Н. Шнурников, А. Засорин</i>	223
10.6.	Теоремы Птолемея и Кези (3*). <i>А. Д. Блинков, А. А. Заславский</i>	224
10.6.1.	Теорема Птолемея	224
10.6.2.	Теорема Кези	225
§ 11.	Геометрические преобразования	229
11.1.	Применения движений. (1) <i>А. Д. Блинков</i>	229
11.2.	Классификация движений плоскости (2). <i>А. Б. Скопенков</i>	236
11.3.	Классификация движений пространства (3*). <i>А. Б. Скопенков</i>	238
11.4.	Применение подобия и гомотетии (1). <i>А. Д. Блинков</i>	239
11.5.	Поворотная гомотетия (2). <i>П. А. Кожевников</i>	245
11.5.1.	Вводные задачи: немного о велосипедистах	245
11.5.2.	Основные задачи	246
11.5.3.	Дополнительные задачи	247
11.6.	Подобие (1). <i>А. Б. Скопенков</i>	251
11.7.	Сжатие к прямой (2). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	251
11.8.	Параллельная проекция и аффинные преобразования (2). <i>А. Б. Скопенков</i>	253

11.9. Центральная проекция и проективные преобразования (3).	
<i>А. Б. Скопенков</i>	256
11.10. Инверсия (2). <i>А. Б. Скопенков</i>	258
§ 12. Аффинная и проективная геометрия	263
12.1. Буря на Массовом поле (2). <i>А. А. Гаврилюк</i>	263
12.2. Двойные отношения (2). <i>А. А. Гаврилюк</i>	265
12.3. Полярное соответствие (2). <i>А. А. Гаврилюк, П. А. Кожевников</i>	269
§ 13. Комплексные числа и геометрия (3). <i>А. А. Заславский</i>	275
13.1. Комплексные числа и элементарная геометрия.	275
13.2. Комплексные числа и круговые преобразования.	278
§ 14. Построения и геометрические места точек	280
14.1. Геометрические места точек (1). <i>А. Д. Блинков</i>	280
14.2. Задачи на построение и ГМТ, связанные с площадями (1).	
<i>А. Д. Блинков</i>	287
14.3. Построения. Ящик инструментов (2). <i>А. А. Гаврилюк</i>	293
14.4. Дополнительные построения (2*). <i>И. Н. Шнурников</i>	296
§ 15. Стереометрия	300
15.1. Рисование (2). <i>А. Б. Скопенков</i>	300
15.2. Правильные многогранники (3)	302
15.2.1. Вписанные и описанные. <i>А. Я. Канель-Белов</i>	302
15.2.2. Самосовмещения. <i>А. Б. Скопенков</i>	305
15.3. Многомерье (4*). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	307
15.3.1. Простейшие многогранники в многомерном про-	
странстве. <i>Ю. М. Бурман, А. Я. Канель-Белов</i>	307
15.3.2. Многомерные объёмы	311
15.3.3. Объёмы и сечения	312
15.3.4. Две задачи для исследования	313
15.3.5. Разбиение на части меньшего диаметра. <i>А. М. Рай-</i>	
<i>городский</i>	313
§ 16. Разные задачи по геометрии	317
16.1. Геометрические задачи на экстремальные значения (2).	
<i>А. Д. Блинков</i>	317
16.2. Площади (2). <i>А. Д. Блинков</i>	323
16.3. Конические сечения (3*). <i>А. В. Акопян</i>	331
16.4. Криволинейные треугольники и неевклидова геометрия	
(3*). <i>М. Б. Скопенков</i>	339
Глава 3. Комбинаторика	
§ 17. Подсчёты в комбинаторике	345
17.1. Подсчёты числа способов (1). <i>А. А. Гаврилюк, Д. А. Пермяков</i>	345
17.2. Наборы подмножеств (2). <i>Д. А. Пермяков</i>	348
17.3. Формула включений и исключений (2). <i>Д. А. Пермяков</i>	350
17.4. Несколько взглядов на числа Каталана (2). <i>Г. Б. Шабат</i>	356
§ 18. Принцип Дирихле и индукция	361
18.1. Принцип Дирихле (1). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	361
18.2. Правило крайнего (2). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	364

18.3.	Цикличность I (2). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	366
18.4.	Цикличность II (2). <i>П. А. Кожевников</i>	369
18.5.	Конечное и счётное (2). <i>П. А. Кожевников</i>	371
18.6.	Немного индукции и перебора (3). <i>И. Н. Шнурников</i>	376
§ 19.	Графы. <i>Д. А. Пермяков, А. Б. Скопенков</i>	378
19.1.	Графы под шубой (1)	378
19.2.	Подсчёты в графах (1)	381
19.3.	Пути в графах (2)	383
§ 20.	Конструкции и инварианты	386
20.1.	Конструкции (1). <i>А. В. Шаповалов</i>	386
20.2.	Инварианты I (1). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	398
20.3.	Инварианты II (1). <i>А. В. Шаповалов</i>	400
20.4.	Раскраски	408
20.4.1.	Замощения (1). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	408
20.4.2.	Таблицы (2). <i>Д. А. Пермяков</i>	409
20.5.	Полуинварианты(1). <i>А. В. Шаповалов</i>	410
§ 21.	Алгоритмы	418
21.1.	Игры (1). <i>Д. А. Пермяков, М. Б. Скопенков, А. В. Шаповалов</i>	418
21.2.	Информационные задачи (2). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	429
21.3.	Коды, исправляющие ошибки (2). <i>М. Б. Скопенков</i>	431
21.4.	Булев куб (2). <i>А. Б. Скопенков</i>	434
21.5.	Выразимость для функций алгебры логики. <i>А. Б. Скопенков</i>	438
21.5.1.	Примеры и определения	438
21.5.2.	Теорема Поста (2*)	439
21.6.	Сложность суммирования. <i>Ю. Г. Кудряшов, А. Б. Скопенков</i>	442
21.6.1.	Вводные задачи (2)	442
21.6.2.	Определения и примеры (3*)	443
21.6.3.	Асимптотические оценки (4*)	445
§ 22.	Вероятность. <i>А. А. Заславский</i>	452
22.1.	Классическое определение вероятности (1).	452
22.2.	Более общее определение вероятности (1)	454
22.3.	Независимость и условная вероятность (1)	457
22.4.	Случайные величины (3)	461
22.5.	Испытания Бернулли (3)	464
22.6.	Случайные блуждания и электрические цепи (3). <i>А. А. Заславский, М. Б. Скопенков, А. В. Устинов</i>	466
22.7.	Теория вероятностей и комбинаторная геометрия (4*). <i>А. М. Райгородский</i>	482
§ 23.	Перестановки. <i>А. Б. Скопенков</i>	484
23.1.	Порядок, тип, сопряжённость (1)	484
23.2.	Чётность перестановки (1)	487
23.3.	Комбинаторика классов эквивалентности (2)	488
§ 24.	Группы. <i>В. А. Брагин, А. А. Клячко, А. Б. Скопенков</i>	493
24.1.	Зачем, для кого и как устроен этот параграф	493
24.2.	Как придумать	495
24.2.1.	Постановка задачи (2)	495

24.2.2. Примеры групп (2)	496
24.2.3. Докажем и применим теорему Лагранжа (2)	498
24.2.4. Применим сопряжение (3)	499
24.2.5. Максимальные подгруппы и центр (4*)	501
24.3. Итог: формулировка и доказательство	505
24.3.1. Формулировка основного результата (2)	505
24.3.2. Доказательство части «только тогда» (3*)	506
24.3.3. Доказательство части «тогда» (4*)	506
§ 25. Комбинаторная геометрия	510
25.1. О ковровых дорожках и салфетках (2). <i>П. А. Кожевников</i>	510
25.2. Теорема Хелли (2). <i>А. В. Акопян</i>	516
25.3. Многоугольники на клетчатой бумаге (2). <i>В. В. Прасолов,</i> <i>М. Б. Скопенков</i>	518
25.4. Принцип Дирихле на прямой (3). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	531
25.5. Принцип Дирихле и его применения в геометрии (3). <i>И. В. Аржанцев</i>	533
25.6. Фазовые пространства (3). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	539
25.7. Линейное варьирование (3). <i>А. Я. Канель-Белов</i>	540
25.8. Собери квадрат (3*). <i>М. Б. Скопенков, О. А. Малиновская,</i> <i>С. А. Дориченко, Ф. А. Шаров</i>	542
25.9. Можно ли из тетраэдра сделать куб? (3). <i>М. В. Прасолов,</i> <i>М. Б. Скопенков</i>	554
Глава 4. О преподавании. А. Б. Скопенков	
§ 26. Олимпиады и математика	565
§ 27. Начинать с языка или содержания?	566
§ 28. О необходимости мотивировок	569
28.1. «За» и «против» мотивировок	569
28.2. О мотивировках теории Галуа	571
28.3. Почему не принимается мотивированное изложение?	572
28.3.1. Отзыв	573
28.3.2. Комментарии к отзыву	573
28.3.3. Другие высказывания	576
§ 29. Кружки и олимпиады как путь в математику и как спорт. <i>А. Я. Канель-Белов, А. И. Буфетов</i>	580
29.1. Введение	580
29.2. Спортивный подход	581
29.3. Олимпиада как путь в математику	582
Предметный указатель	588