ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие **3**

Раздел 1
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава 1. Метод координат **5**

§ 1.1. Направленные отрезки оси 5
§ 1.2. Декартовы координаты на прямой линии 8
§ 1.3. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости 9
§ 1.4. Полярная система координат 16
§ 1.5. Декартовы прямоугольные координаты в пространстве 18

Глава 2. Векторная алгебра **21**

§ 2.1. Основные определения 21
§ 2.2. Линейные операции над векторами 22
§ 2.3. Проекция вектора на ось 33
§ 2.4. Декартовы прямоугольные координаты вектора 35
§ 2.5. Разложение вектора по ортонормированному базису 39
§ 2.6. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами 41
§ 2.7. Скалярное произведение векторов 47
2.7.1. Определение скалярного произведения 47
2.7.2. Свойства скалярного произведения 48
2.7.3. Выражение скалярного произведения в координатах 49
§ 2.8. Векторное и смешанное произведения векторов 51
2.8.1. Определители второго и третьего порядков 51
2.8.2. Определение векторного произведения 53
2.8.3. Ориентация тройки векторов 54
2.8.4. Смешанное произведение трех векторов 54
2.8.5. Свойства векторного произведения 56
2.8.6. Выражение векторного и смешанного произведений в координатах 59

Глава 3. Понятие об уравнениях линий и поверхностей **64**

§ 3.1. Составление уравнения линии по ее геометрическим свойствам 64
§ 3.2. Задание линий с помощью уравнений 66
§ 3.3. Пересечение двух линий 67
§ 3.4. Параметрические уравнения линий 69
§ 3.5. Уравнения линий в полярных координатах 74
§ 3.6. Уравнение поверхности 77
§ 3.7. Уравнение линии в пространстве 78

Глава 4. Прямая линия на плоскости **79**

§ 4.1. Параметрические уравнения прямой. Каноническое уравнение прямой 79
§ 4.2. Основная теорема о прямой 80
§ 4.3. Частные случаи уравнения прямой 82

§ 4.4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости ... 83
§ 4.5. Расстояние от точки до прямой линии ... 86
§ 4.6. Геометрический смысл знака трехчлена $f(x, y) = Ax + By + C$ ... 87
§ 4.7. Различные формы уравнения прямой ... 89
4.7.1. Уравнение прямой через две заданные точки ... 89
4.7.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом ... 89
4.7.3. Уравнение пучка прямых ... 90
§ 4.8. Угол от одной прямой до другой. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых ... 91
4.8.1. Вычисление угла между двумя прямыми ... 91
4.8.2. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых ... 92

Глава 5. Линии второго порядка ... 97

§ 5.1. Общее уравнение второй степени ... 97
§ 5.2. Эллипс ... 97
5.2.1. Определение эллипса. Каноническое уравнение эллипса ... 97
5.2.2. Исследование формы эллипса ... 99
5.2.3. Эксцентриситет эллипса ... 100
§ 5.3. Гипербола ... 102
5.3.1. Определение гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы ... 102
5.3.2. Исследование формы гиперболы ... 103
5.3.3. Взаимно сопряженные гиперболы ... 105
5.3.4. Эксцентриситет гиперболы ... 105
§ 5.4. Парабола ... 107
§ 5.5. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости ... 110
§ 5.6. Преобразование уравнения линии второго порядка к каноническому виду ... 113

Глава 6. Плоскость и прямая в пространстве ... 120

§ 6.1. Основная теорема о плоскости ... 120
§ 6.2. Частные случаи уравнения плоскости ... 123
§ 6.3. Взаимное расположение двух плоскостей ... 124
§ 6.4. Расстояние от точки до плоскости ... 126
§ 6.5. Геометрический смысл знака четырехчлена $f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$ ... 127
§ 6.6. Угол между двумя плоскостями ... 128
§ 6.7. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения прямой ... 130
§ 6.8. Прямая как линия пересечения двух плоскостей ... 131
§ 6.9. Взаимное расположение прямых в пространстве ... 132
§ 6.10. Угол между двумя прямыми в пространстве ... 134
§ 6.11. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве ... 135
§ 6.12. Угол между прямой и плоскостью ... 139

Глава 7. Поверхности второго порядка ... 141

§ 7.1. Эллипсоид ... 141
§ 7.2. Гиперболоиды ... 143
§ 7.3. Параболоиды ... 146
§ 7.4. Цилиндры второго порядка ... 149
§ 7.5. Конус второго порядка ... 152

Глава 8. Комплексные числа 154
§ 8.1. Комплексные числа. Комплексная плоскость. Действия над комплексными числами 154
§ 8.2. Полярная (тригонометрическая) форма записи комплексного числа 157
§ 8.3. Геометрическое истолкование действий над комплексными числами 161
§ 8.4. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа 164
§ 8.5. Показательная функция. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа 167

Раздел 2
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава 1. Решение систем линейных уравнений 171
§ 1.1. Системы линейных уравнений: основные определения 171
§ 1.2. Элементарные преобразования системы линейных уравнений 173
§ 1.3. Разрешение системы линейных уравнений по отдельной переменной 175
§ 1.4. Исследование и решение системы линейных уравнений методом Жордана — Гаусса 177
§ 1.5. Таблицы Гаусса 181

Глава 2. Определители *n*-го порядка 189
§ 2.1. Определение определителя *n*-го порядка 189
§ 2.2. Свойства определителей 191
§ 2.3. Применение определителей к системам линейных уравнений 202

Глава 3. Матрицы 206
§ 3.1. Основные определения 206
§ 3.2. Действия над матрицами 207
§ 3.3. Матричная форма записи системы линейных уравнений 213
§ 3.4. Обратная матрица 214

Глава 4. *n*-мерные векторы 222
§ 4.1. *n*-мерное векторное пространство 222
§ 4.2. Векторная форма записи системы линейных уравнений 224
§ 4.3. Линейная зависимость векторов 226
§ 4.4. Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов 228
§ 4.5. Базис системы векторов 230
§ 4.6. Отыскание базиса системы векторов 236

Глава 5. Системы линейных уравнений 241
§ 5.1. Исследование системы *m* уравнений с *n* неизвестными 241
§ 5.2. Фундаментальная система решений однородной системы уравнений 244
§ 5.3. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений 249

Глава 6. Линейные преобразования векторного пространства 251
§ 6.1. Линейное преобразование: понятие и основные свойства 251
§ 6.2. Матрица линейного преобразования 253
§ 6.3. Действия над линейными преобразованиями 258
§ 6.4. Собственные векторы линейного преобразования 259
§ 6.5. Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к другому базису 265
Глава 7. Евклидово пространство 268
§ 7.1. Определение евклидова пространства 268
§ 7.2. Основные метрические понятия 269
§ 7.3. Симметрические линейные преобразования 274
§ 7.4. Квадратичные формы и приведение их к каноническому виду 285

Раздел 3
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 1. Элементы теории множеств 292
§ 1.1. Понятие множества. Операции над множествами 292
1.1.1. Основные определения 292
1.1.2. Способы задания множеств. Равенство множеств 293
1.1.3. Операции над множествами. Диаграммы Венна 294
§ 1.2. Понятие об отображении множеств 299
§ 1.3. Сравнение множеств 301
Глава 2. Введение в анализ 304
§ 2.1. Переменные величины 304
2.1.1. Область изменения 304
2.1.2. Конечные промежутки 305
2.1.3. Бесконечные промежутки 306
§ 2.2. Функция 306
2.2.1. Определение и способы задания функции 306
2.2.2. Основные элементарные функции 308
2.2.3. Сложная функция. Элементарная функция 311
§ 2.3. Числовые последовательности 312
2.3.1. Определение числовой последовательности 312
2.3.2. Монотонные последовательности 313
2.3.3. Ограниченные последовательности 313
2.3.4. Предел последовательности 314
2.3.5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности 316
2.3.6. Число e 317
§ 2.4. Предел функции 320
2.4.1. Определение предела функции 320
2.4.2. Свойства функции, имеющей конечный предел 322
2.4.3. Бесконечно малые функции и их свойства 325
2.4.4. Теорема об арифметических операциях над функциями, имеющими предел 328
2.4.5. Два замечательных предела 333
2.4.6. Сравнение бесконечно малых функций 337

2.4.7. Эквивалентные бесконечно малые функции: их применение к отысканию пределов ... 339
§ 2.5. Непрерывность функций ... 344
2.5.1. Определения функции, непрерывной в точке ... 344
2.5.2. Точки разрыва ... 346
2.5.3. Свойства непрерывных функций ... 347
2.5.4. Непрерывность основных элементарных функций ... 348
2.5.5. Непрерывность элементарных функций ... 350
2.5.6. Свойства функций, непрерывных на отрезке ... 350
Глава 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной ... 353
§ 3.1. Производная ... 353
3.1.1. Задачи, приводящие к понятию производной ... 353
3.1.2. Определение производной ... 355
3.1.3. Существование производной и непрерывность функции ... 357
3.1.4. Правила нахождения производной ... 358
3.1.5. Обратная функция и ее производная ... 361
3.1.6. Формулы для отыскания производных ... 364
3.1.7. Логарифмическая производная ... 370
§ 3.2. Дифференциал ... 372
3.2.1. Определение дифференциала ... 372
3.2.2. Геометрический смысл и правила вычисления дифференциала ... 374
3.2.3. Инвариантность формы дифференциала первого порядка ... 375
3.2.4. Дифференциал как источник приближенных формул ... 375
§ 3.3. Теоремы о среднем значении ... 376
3.3.1. Теорема Ферма ... 376
3.3.2. Теорема Ролля ... 378
3.3.3. Теорема Лагранжа ... 381
3.3.4. Теорема Коши ... 384
§ 3.4. Производные и дифференциалы высших порядков ... 385
§ 3.5. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя — Бернулли ... 387
§ 3.6. Формула Тейлора ... 391
3.6.1. Многочлен Тейлора данной функции ... 391
3.6.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано ... 394
3.6.3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа ... 398
§ 3.7. Исследование функций с помощью производных ... 400
3.7.1. Признаки возрастания и убывания функции ... 400
3.7.2. Экстремум функции ... 400
3.7.3. Направление выпуклости графика функции ... 404
3.7.4. Точки перегиба ... 405
3.7.5. Асимптоты графика функции ... 406
Глава 4. Функции нескольких переменных ... 411
§ 4.1. Основные понятия ... 411
4.1.1. Примеры функций нескольких переменных ... 411
4.1.2. Множества точек на плоскости и в пространстве ... 411
4.1.3. Функции двух и трех переменных ... 413
4.1.4. Понятие функции *n* переменных ... 414
4.1.5. Предел и непрерывность функции ... 415
§ 4.2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных ... 420
4.2.1. Частные производные ... 420
4.2.2. Дифференцируемость и дифференциал ... 422
4.2.3. Производные от сложных функций ... 426
4.2.4. Инвариантность формы первого дифференциала ... 428
4.2.5. Производные высших порядков ... 429
4.2.6. Дифференциалы высших порядков ... 431

§ 4.3. Экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции 433
4.3.1. Экстремум функции 433
4.3.2. Наибольшее и наименьшее значения функции 436
§ 4.4. Скалярное поле 437
4.4.1. Производная по направлению 437
4.4.2. Градиент 439
4.4.3. Поверхности уровня 440
§ 4.5. Неявная функция. Производная от функции, заданной неявно 441

Раздел 4
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 1. Неопределенный интеграл 446
§ 1.1. Первообразная и неопределенный интеграл 446
1.1.1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла 446
1.1.2. Основные свойства неопределенного интеграла 448
1.1.3. Таблица основных интегралов 449
§ 1.2. Методы интегрирования 449
1.2.1. Непосредственное интегрирование 449
1.2.2. Интегрирование методом замены переменной 456
1.2.3. Интегрирование по частям 458
1.2.4. Интегрирование дробно-рациональных функций 460
1.2.5. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций 465
1.2.6. Интегрирование некоторых иррациональных функций 468
Глава 2. Определенный интеграл 471
§ 2.1. Определение и геометрический смысл определенного интеграла 471
§ 2.2. Свойства определенного интеграла 474
§ 2.3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом 479
§ 2.4. Формула Ньютона — Лейбница 483
§ 2.5. Замена переменной в определенном интеграле 484
§ 2.6. Интегрирование по частям 485
§ 2.7. Геометрические приложения определенного интеграла 486
2.7.1. Вычисление площади в прямоугольных координатах 486
2.7.2. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах 488
2.7.3. Длина дуги кривой 490
Глава 3. Несобственные интегралы 497
§ 3.1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования 497
§ 3.2. Интегралы от разрывных функций 500
Глава 4. Кратные интегралы 505
§ 4.1. Двойной интеграл 505
4.1.1. Определение и геометрический смысл двойного интеграла 505
4.1.2. Свойства двойного интеграла 507
§ 4.2. Вычисление двойного интеграла 508
4.2.1. Два основных вида области интегрирования 508
4.2.2. Двукратный интеграл 509
4.2.3. Расстановка пределов в двукратном интеграле 511
4.2.4. Свойства двукратного интеграла 513

4.2.5. Приведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области ... 516
4.2.6. Приведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области ... 517
§ 4.3. Замена переменных в двойном интеграле ... 523
4.3.1. Регулярное отображение областей ... 523
4.3.2. Криволинейные координаты. Площадь в криволинейных координатах ... 524
4.3.3. Замена переменных в двойных интегралах ... 527
4.3.4. Двойной интеграл в полярных координатах ... 529
§ 4.4. Приложения двойного интеграла к геометрическим и физическим задачам ... 534
4.4.1. Вычисление объемов ... 534
4.4.2. Вычисление площадей ... 536
4.4.3. Координаты центра тяжести плоской фигуры ... 538
4.4.4. Моменты инерции плоской фигуры ... 540
§ 4.5. Тройной интеграл ... 541
4.5.1. Определение и вычисление тройного интеграла ... 541
4.5.2. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты ... 545
Глава 5. Криволинейные интегралы ... 553
§ 5.1. Криволинейный интеграл первого рода ... 553
5.1.1. Задача о нахождении массы материальной кривой ... 553
5.1.2. Определение и вычисление криволинейного интеграла первого рода ... 554
5.1.3. Свойства криволинейного интеграла ... 558
§ 5.2. Криволинейный интеграл второго рода ... 559
5.2.1. Определение криволинейного интеграла второго рода ... 559
5.2.2. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода ... 560
5.2.3. Свойства криволинейного интеграла второго рода ... 563
5.2.4. Формула Грина ... 565
5.2.5. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования ... 568
Глава 6. Поверхностные интегралы ... 572
§ 6.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности ... 572
§ 6.2. Площадь поверхности ... 574
§ 6.3. Поверхностный интеграл первого рода ... 577
§ 6.4. Сторона поверхности ... 580
§ 6.5. Поверхностный интеграл второго рода ... 583
§ 6.6. Формула Остроградского ... 588
§ 6.7. Формула Стокса ... 591
6.7.1. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода ... 591
6.7.2. Вывод формулы Стокса ... 592
6.7.3. Применение формулы Стокса к исследованию криволинейных интегралов в пространстве ... 598
Глава 7. Теория поля ... 600
§ 7.1. Понятие и примеры векторных полей ... 600
§ 7.2. Поток векторного поля ... 600
§ 7.3. Дивергенция ... 603
§ 7.4. Циркуляция и ротор ... 606
§ 7.5. Потенциальное поле ... 610

Раздел 5
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 1. Понятие о дифференциальных уравнениях 613
§ 1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям 613
§ 1.2. Основные определения 619
Глава 2. Дифференциальные уравнения первого порядка 620
§ 2.1. Формы записи уравнений. Задача Коши. Теорема Коши 620
§ 2.2. Поле направлений. Изоклины 623
§ 2.3. Уравнения с разделяющимися переменными 625
§ 2.4. Уравнения с однородными функциями 628
§ 2.5. Линейные уравнения 631
§ 2.6. Уравнение Бернулли 633
§ 2.7. Уравнения в полных дифференциалах 636
§ 2.8. Интегрирующий множитель 640
Глава 3. Дифференциальные уравнения высших порядков 646
§ 3.1. Основные понятия и определения. Задача Коши. Теорема Коши 646
§ 3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка 648
Глава 4. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков 654
§ 4.1. Теорема Пикара. Линейный дифференциальный оператор 654
§ 4.2. Свойства частных решений однородного линейного уравнения 656
§ 4.3. Понятие о линейной независимости функций 657
§ 4.4. Необходимое условие линейной зависимости n функций 658
§ 4.5. Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений однородного линейного уравнения 660
§ 4.6. Построение общего решения однородного линейного уравнения 662
§ 4.7. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами 664
§ 4.8. Однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 672
§ 4.9. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 674
§ 4.10. Способ неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения неоднородного уравнения 676
§ 4.11. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) 681

Раздел 6
РЯДЫ

Глава 1. Числовые ряды 684
§ 1.1. Основные определения 684
§ 1.2. Простейшие свойства рядов 686
§ 1.3. Необходимое условие сходимости ряда 688
§ 1.4. Знакоположительные ряды 689

§ 1.5. Ряды с членами произвольного знака 698
§ 1.6. Знакочередующиеся ряды 700

Глава 2. Функциональные ряды 704

§ 2.1. Основные понятия 704
§ 2.2. Равномерная сходимость функционального ряда 706
2.2.1. Неравномерная и равномерная сходимость 706
2.2.2. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости 708
2.2.3. Достаточный признак равномерной сходимости 712
§ 2.3. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов 715
§ 2.4. Степенные ряды 721
2.4.1. Интервал сходимости степенного ряда, радиус сходимости 721
2.4.2. Свойства степенных рядов 724
§ 2.5. Разложение функций в степенные ряды 726
2.5.1. Ряд Тейлора 726
2.5.2. Разложение в степенной ряд основных элементарных функций 730
§ 2.6. Применение степенных рядов 735

Список литературы 743