УДК 519.71
ББК 22.18
А 13

Абгарян К. А.

А 13 Матричное исчисление с приложениями в теории динамических систем: Учебное пособие для вузов / К. А. Абгарян.— М.: Вузовская книга, 2016. — 544 с.: ил.

ISBN 978-5-89522-295-9

Учебное пособие посвящено изложению аппарата матричного исчисления и идеи асимптотического интегрирования и канонических преобразований дифференциальных и интегродифференциальных уравнений и их применениям в механике, технике, теории автоматического управления. По сравнению с традиционным изложением аппарат матричного исчисления дается с добавлениями и разработками, которые необходимы для последующего применения в специальных разделах книги. В прикладных разделах предпочтение отдано задачам, в которых математическая модель процесса представляется в виде многомерных нестационарных систем дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.

Для специалистов в области механики, математики, автоматического управления и машиноведения.

УДК 519.71
ББК 22.18

ISBN 978-5-89522-295-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 11

Часть I. Теория матриц

Глава 1. **Матрицы** 13

§ 1.1. Исходные определения и обозначения 13
§ 1.2. Сложение матриц и умножение матриц на число 15
§ 1.3. Умножение прямоугольных матриц 16
§ 1.4. Определитель произведения матриц 18
§ 1.5. Транспонирование матрицы и переход к сопряженной матрице . 20
§ 1.6. Присоединенная матрица 21
§ 1.7. Обратная матрица 22
§ 1.8. Блочные матрицы 23
§ 1.9. Линейные преобразования и матрицы 27
§ 1.10. Задачи и упражнения 30

Глава 2. **Векторы, векторные пространства, линейные операторы и матрицы** 33

§ 2.1. Векторы и векторные пространства 33
§ 2.2. Линейная зависимость векторов 34
§ 2.3. Размерность и базис векторного пространства 36
§ 2.4. Изоморфизм n-мерных пространств 38
§ 2.5. Подпространства векторного пространства 39
§ 2.6. Линейные операторы в векторных пространствах 40
§ 2.7. Матрица как линейный оператор в численных пространствах . . 42
§ 2.8. Неравенства Сильвестра 46
§ 2.9. Разложение матрицы на прямоугольные множители 48
§ 2.10. Задачи и упражнения 49

Глава 3. **Линейные операторы в n-мерном векторном пространстве** 51

§ 3.1. Кольцо линейных операторов 51
§ 3.2. Матрицы линейного оператора в разных базисах 52
§ 3.3. Обратный оператор 53
§ 3.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора и квадратной матрицы 54
§ 3.5. Линейные операторы и матрицы простой структуры 56
§ 3.6. Расщепление n-мерного пространства 58
§ 3.7. Проекционные операторы и матрицы 59

Глава 4. Расщепление пространства на инвариантные подпространства. Нормальные формы матрицы 65

§ 4.1. Минимальные многочлены вектора, векторного пространства, матрицы 65
§ 4.2. Инвариантные подпространства векторного пространства . . . 68
§ 4.3. Расщепление векторного пространства на инвариантные подпространства с взаимно простыми минимальными многочленами 70
§ 4.4. Сравнение. Пространство классов сравнимых векторов 73
§ 4.5. Циклические подпространства векторного пространства 77
§ 4.6. Нормальные формы матрицы 81
4.6.1. Естественные нормальные формы (82). 4.6.2. Жорданова нормальная форма (83).
§ 4.7. Инвариантные многочлены. Единственность нормальных форм линейного оператора 85

Глава 5. Преобразование матрицы к квазидиагональному виду и разложение ее на составляющие 90

§ 5.1. Дефект матричного многочлена 90
§ 5.2. Теорема Гамильтона—Кэли 92
§ 5.3. Построение матрицы, преобразующей квадратную матрицу к квазидиагональному виду 93
§ 5.4. Собственные значения субматрицы преобразованной квазидиагональной матрицы 96
§ 5.5. Общий вид преобразующей матрицы 97
§ 5.6. Построение жордановой формы матрицы 99
§ 5.7. Случай матрицы простой структуры 103
§ 5.8. Разложение квадратной матрицы на составляющие 105
§ 5.9. Матрицы ортогонального проектирования 111
§ 5.10. О приведении к квазидиагональному виду и разложении на составляющие одной матрицы специального вида 115
§ 5.11. Аналитические функции от матриц 117

Глава 6. Квадратичные и эрмитовы формы 120

§ 6.1. Метризация векторного пространства 120
§ 6.2. Ортонормированные базисы в унитарном и евклидовом пространствах 124
§ 6.3. Линейные операторы в унитарном пространстве 125
6.3.1. Сопряженный оператор (125). 6.3.2. Собственные векторы и собственные значения эрмитова оператора (127). 6.3.3. Унитарный оператор (130). 6.3.4. Преобразование эрмитовой матрицы к диагональному виду с помощью унитарной матрицы (131).
§ 6.4. Линейные операторы в евклидовом пространстве 132
6.4.1. Транспонированный оператор. Симметрический оператор (132). 6.4.2. Ортогональный оператор (135). 6.4.3. Преобразование симметрической матрицы к диагональному виду с помощью ортогональной матрицы (136).
§ 6.5. Квадратичные формы 137
6.5.1. Замена переменных (138). 6.5.2. Закон инерции (138). 6.5.3. Приведение квадратичной формы к главным осям (140).
§ 6.6. Эрмитовы формы 142
6.6.1. Замена переменных (143). 6.6.2. Закон инерции (143). 6.6.3. Приведение эрмитовой формы к главным осям (144).

Часть II. Матрицы и линейные дифференциальные уравнения

Глава 7. Общие свойства линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений 146

§ 7.1. Производная и интеграл матрицы 146
§ 7.2. Векторно-матричная запись линейных дифференциальных уравнений 147
§ 7.3. Норма матрицы 153
§ 7.4. Матричные ряды 154
§ 7.5. Теорема существования и единственности решения однородного векторно-матричного уравнения 155
7.5.1. Существование решения (155). 7.5.2. Единственность решения (157).
§ 7.6. Фундаментальная матрица системы 159
7.6.1. Решение матричного дифференциального уравнения (159). 7.6.2. Формула Остроградского—Лиувилля (160). 7.6.3. Фундаментальная матрица (161).
§ 7.7. Матрицант 162
§ 7.8. Сопряженное уравнение 163
§ 7.9. Неоднородное векторно-матричное уравнение 164
7.9.1. Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа (164). 7.9.2. Другой способ (165).
§ 7.10. Решение одного матричного уравнения 166

Глава 8. Векторно-матричное линейное дифференциальное уравнение с постоянными матричными коэффициентами 168

§ 8.1. Экспоненциал матрицы 168
§ 8.2. Решение матричного уравнения в форме экспоненциала . . . 170
§ 8.3. Метод Эйлера 170
§ 8.4. Решение уравнения с помощью преобразования Лапласа . . . 172
§ 8.5. Интегрирование уравнения путем замены переменных 175
§ 8.6. Расщепление системы на независимые подсистемы меньшего порядка 177
8.6.1. Преобразование квадратной матрицы системы к квазидиагональному виду (177). 8.6.2. Расщепление системы (178). 8.6.3. Случай матрицы простой структуры (179). 8.6.4. Полное расщепление в общем случае (179). 8.6.5. Расщепление сопряженной системы. Биортогональность (181).
§ 8.7. Теория возмущений 182
8.7.1. Метод последовательных приближений для однородной системы (182). 8.7.2. О решении одного матричного уравнения. Основная лемма (182). 8.7.3. Асимптотический метод для однородного уравнения (184). 8.7.4. Асимптотический метод для неоднородного уравнения (187).

Глава 9. Асимптотическое расщепление векторно-матричного уравнения с переменными матричными коэффициентами (первый метод) 189

§ 9.1. Дифференцируемость матрицы, преобразующей квадратную матрицу к квазидиагональному виду 189

§ 9.2. Построение формального процесса для расщепления векторно-матричного уравнения . . . 194
§ 9.3. Некоторые свойства матриц, участвующих в формальном процессе расщепления . . . 201
§ 9.4. Рекуррентные соотношения в некоторых частных случаях . . . 206
§ 9.5. Условие сохранения нормы решений уравнений при замене переменных . . . 207
§ 9.6. Случай полного расщепления системы. . . . 211
§ 9.7. Уравнения с постоянными матричными коэффициентами . . . 211
§ 9.8. Расщепление сопряженного векторно-матричного уравнения . . . 213
§ 9.9. Приближенное решение системы . . . 221
§ 9.10. Асимптотический характер приближенного решения . . . 223
9.10.1. Асимптотическая оценка на промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant L$ (226).
9.10.2. Асимптотическая оценка на промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ (230).

Глава 10. **Асимптотическое расщепление векторно-матричного уравнения с переменными коэффициентами (второй метод)** 233

§ 10.1. Две леммы . . . 233
§ 10.2. Преобразование однородной линейной системы с постоянными коэффициентами к системе независимых уравнений . . . 236
10.2.1. Преобразование к расщепленной системе уравнений 2-го порядка (236). 10.2.2. Общий случай (238). 10.2.3. Случай матрицы простой структуры (240).
§ 10.3. Преобразование однородной нестационарной системы дифференциальных уравнений к расщепленной системе . . . 241
10.3.1. Преобразование к расщепленной системе уравнений 2-го порядка (241). 10.3.2. Общий случай (246). 10.3.3. Случай простых собственных значений матрицы системы (251). 10.3.4. Приближенное решение системы (252).
§ 10.4. Расщепление неоднородной системы . . . 252
§ 10.5. Асимптотические оценки приближенного решения системы . . . 260

Глава 11. **Расщепление сингулярно возмущенной многотемповой системы** . . . 262

§ 11.1. Постановка задачи . . . 262
§ 11.2. Один метод последовательного выделения однотемповых подсистем из многотемповой системы . . . 265
§ 11.3. Алгоритм формального расщепления системы (11.1.3) . . . 267
11.3.1. Построение $K_\sigma^{[0]}$ и $\Lambda_\sigma^{[0]}$ (270). 11.3.2. Построение $K_\sigma^{[k]}$ и $\Lambda_\sigma^{[k]}$ (273). 11.3.3. Построение $\widetilde{M}_\sigma(t,\varepsilon)$ (276).
§ 11.4. Приближенное решение уравнения (11.3.1) . . . 278
11.4.1. Асимптотические оценки приближенного решения (279).
11.4.2. Асимптотическая оценка на промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant L$ (280).
11.4.3. Асимптотическая оценка на промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ (285).

Глава 12. **Некоторые свойства систем линейных дифференциальных уравнений** . . . 287

§ 12.1. Проблема преобразования системы линейных дифференциальных уравнений в другую с наперед заданной матрицей . . . 287

§ 12.2. Матричное дифференциальное уравнение кинематического подобия. Кинематически подобные матрицы и кинематически эквивалентные системы . . . 289
12.2.1. Общее решение матричного дифференциального уравнения кинематического подобия (289). 12.2.2. Решение проблемы преобразования линейной системы в другую с наперед заданной матрицей (290). 12.2.3. Выводы (291).

Глава 13. **Оценки решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений** . . . 292

§ 13.1. Неравенства Важевского . . . 292
§ 13.2. Уточнение неравенств Важевского . . . 293
§ 13.3. Оценки координат и нормы решений линейных однородных систем . . . 296
13.3.1. Оценки координат решений линейных однородных систем (296). 13.3.2. Оценки нормы решения линейных однородных систем (302).
§ 13.4. Неравенства Четаева . . . 303
§ 13.5. О выборе функции $V(t,x)$ в неравенствах Четаева . . . 306
§ 13.6. Точные оценки на основе неравенств Четаева . . . 307
§ 13.7. Пучок решений линейной системы . . . 311

Часть III. Теория устойчивости движения

Глава 14. **Развитие понятия устойчивости движения. Краткий обзор** . . . 312

§ 14.1. Устойчивость движения по Ляпунову . . . 313
14.1.1. Определение понятия устойчивости по Ляпунову (313).
14.1.2. Методы решения задач устойчивости (315).
§ 14.2. Общие теоремы прямого метода Ляпунова . . . 317
§ 14.3. Об основополагающих концепциях теории Ляпунова . . . 318
§ 14.4. О путях дальнейшего развития понятия устойчивости движения . 320
§ 14.5. Общая постановка задачи о технической устойчивости . . . 321
14.5.1. Возмущенное и невозмущенное движение. Общий вид уравнений возмущенного движения в векторно-матричной форме (321).
14.5.2. Линеаризация уравнений возмущенного движения. Уравнения первого приближения (323). 14.5.3. Основные определения понятия технической устойчивости (324).
§ 14.6. Устойчивость движения на конечном интервале времени по Каменкову . . . 326
14.6.1. Постановка задачи (326). 14.6.2. Геометрический смысл понятия устойчивости на конечном интервале времени (327). 14.6.3. Основные теоремы об устойчивости и неустойчивости движения на конечном интервале времени (328).

Глава 15. **Понятие K_Δ^ω-устойчивости. Постановка задачи** . . . 329

§ 15.1. Построение области допустимых состояний и определение понятия устойчивости . . . 329
§ 15.2. Геометрический смысл понятия K_Δ^ω-устойчивости . . . 331
15.2.1 Определение диаметра области (15.2.1) (333).
§ 15.3. О методе исследования K_Δ^ω-устойчивости . . . 336

Глава 16. **Общие теоремы K_Δ^ω-устойчивости** . . . 338
§ 16.1. О скелетном разложении матриц . . . 338
§ 16.2. Общие теоремы о K_Δ^ω-устойчивости и K_Δ^ω-неустойчивости . . . 342

Глава 17. **Построение функций Ляпунова** . . . 348
§ 17.1. Диагонализация линейной системы . . . 348
§ 17.2. Пучок решений линейной системы. Условия устойчивости линейной системы . . . 349
§ 17.3. Критерии устойчивости тривиального решения линейной системы 351
§ 17.4. Нелинейные системы . . . 353
§ 17.5. Еще один метод построения функции Ляпунова . . . 355

Глава 18. **K_Δ^ω-устойчивость на неограниченном интервале времени** . . . 358
§ 18.1. Вводные замечания . . . 358
§ 18.2. Устойчивость по Ляпунову и K_Δ^ω-устойчивость на неограниченном интервале времени . . . 360
§ 18.3. Основные теоремы о K_Δ^ω-устойчивости и K_Δ^ω-неустойчивости ($\Delta = [t_0, \infty)$) . . . 365
§ 18.4. Устойчивость автономных систем . . . 371
18.4.1. Линейная однородная система (371). 18.4.2. Критерий устойчивости нелинейной системы по первому приближению (375).
§ 18.5. Эквивалентность, приводимость и устойчивость неавтономных линейных систем . . . 377
18.5.1. Эквивалентные системы (377). 18.5.2. К проблеме приводимости линейных систем (381). 18.5.3. Об устойчивости линейных систем (382).
§ 18.6. Устойчивость неавтономных систем . . . 384
18.6.1. Линейная однородная система (384). 18.6.2. Устойчивость квазилинейных систем (390). 18.6.3. Об устойчивости нелинейного процесса по первому приближению (392).

Глава 19. **K_Δ^ω-устойчивость на конечном интервале времени и техническая устойчивость** . . . 396
§ 19.1. K_Δ^ω-устойчивость на конечном интервале времени . . . 396
§ 19.2. K_Δ^ω-устойчивость и техническая устойчивость . . . 398

Часть IV. Теория управления

Глава 20. **Управляемые системы** . . . 400
§ 20.1. Понятие об управляемых системах . . . 400
§ 20.2. Задача управления . . . 403
§ 20.3. Два подхода к решению задачи управления . . . 405
§ 20.4. Основные задачи теории управления . . . 408
20.4.1. Линейные управляемые системы (409). 20.4.2. Линеаризация нелинейных систем (410).

Глава 21. **Управляемость линейных систем** . . . 412
§ 21.1. Понятие управляемости . . . 412
§ 21.2. Преобразование системы к удобному для исследования виду . . . 413
§ 21.3. Необходимые и достаточные условия управляемости . . . 415
§ 21.4. Построение закона управления с обратной связью для абсолютно управляемой системы . . . 420
§ 21.5. Представление критерия управляемости через матрицу управляемости . . . 421
§ 21.6. Критерий управляемости для линейных стационарных систем . . . 424
§ 21.7. Структура пространства состояний линейной управляемой системы . . . 426
§ 21.8. Структура пространства состояния стационарной системы . . . 429
§ 21.9. Управляемость системы, заданной одним дифференциальным уравнением высокого порядка . . . 432
§ 21.10. Сведение вполне управляемой стационарной системы со скалярным управлением к одному уравнению высокого порядка 434
§ 21.11. Стабилизируемость линейных стационарных систем . . . 437
§ 21.12. Нуль-управляемость линейных систем . . . 439
§ 21.13. Автономность линейных систем . . . 441

Глава 22. **Наблюдаемость линейных систем** . . . 443
§ 22.1. Понятие наблюдаемости . . . 443
§ 22.2. Необходимые и достаточные условия наблюдаемости . . . 444
22.2.1. Инвариантность свойств наблюдаемости (446).
§ 22.3. Принцип двойственности в теории управляемости и наблюдаемости . . . 447
§ 22.4. Критерий наблюдаемости, выраженный через матрицу наблюдаемости . . . 449
§ 22.5. Выделение полностью не наблюдаемой подсистемы в линейной системе . . . 451
§ 22.6. Асимптотический идентификатор . . . 453

Глава 23. **Динамические характеристики линейных систем** . . . 457
§ 23.1. Единичная ступенчатая функция и дельта-функция . . . 457
§ 23.2. Реакция системы на входной сигнал в виде дельта-функции. Импульсная переходная функция . . . 459
§ 23.3. Связь между входными и выходными сигналами посредством импульсной переходной функции . . . 461
§ 23.4. Реакции системы на входной сигнал в виде производной и интеграла от дельта-функции . . . 463
§ 23.5. Преобразование начальных условий на выходе системы в эквивалентный входной сигнал . . . 464
§ 23.6. Определение дифференциального уравнения по импульсной функции . . . 465
§ 23.7. Построение импульсной переходной функции . . . 467
23.7.1. Стационарная система (467). 23.7.2. Нестационарная система (467).

Глава 24. **Приближенное интегрирование уравнений управляемого процесса** . . . 472
§ 24.1. Интегро-дифференциальная система уравнений управляемого процесса . . . 472

24.1.1. О существовании и структуре преобразования к дифференциальной системе (473). 24.1.2. О методике построения приближенного решения уравнений (475).
§ 24.2. Приведение уравнений управляемого процесса к расщепленной дифференциальной системе (метод последовательных приближений) . . . 475
§ 24.3. Приближенное интегрирование уравнений управляемого процесса при малом воздействии регулятора на процесс (случай А) . . . 479
24.3.1. Построение формального решения (480). 24.3.2. Приближенное решение системы (483).
§ 24.4. Приближенное интегрирование уравнений управляемого процесса (случай Б) . . . 484
24.4.1. Построение формального решения (484). 24.4.2. Приближенное решение системы (487).

Глава 25. Некоторые канонические формы уравнений линейных процессов . . . 488

§ 25.1. Преобразование системы уравнений с постоянными коэффициентами к расщепленному виду . . . 488
25.1.1. Однородная система (489). 25.1.2. Неоднородная система (491).
§ 25.2. Формальные преобразования нестационарной системы . . . 491
25.2.1. Однородная система (493). 25.2.2. Случай простых собственных значений (496). 25.2.3. Неоднородная система (496).
§ 25.3. Уравнения управляемого процесса в канонической форме . . . 499

Глава 26. Асимптотическое расщепление уравнений многомерной нестационарной линейной системы выбором структуры матрицы управления . . . 501

§ 26.1. Постановка задачи . . . 501
§ 26.2. Алгоритм формального расщепления уравнения (26.1.6) . . . 502
§ 26.3. Исследование уравнения (26.2.8) . . . 504
§ 26.4. Определение $K^{[k]}$, $\Lambda^{[k]}$ и B_k . . . 510
26.4.1. Построение $K^{[k]}$ и $\Lambda^{[k]}$ при заданных A, H и B_0 (511). 26.4.2. Построение B_k (512).
§ 26.5. Приближенное решение уравнения (21.1.6) . . . 515

Глава 27. Синтез линейных управлений многомерной линейной нестационарной системы с диагональной матрицей . . . 516

§ 27.1. Постановка задачи . . . 516
§ 27.2. О диагонализации системы уравнений управляемого процесса . 517
§ 27.3. Метод асимптотического преобразования уравнений управляемого процесса к системе уравнений с матрицей, близкой к диагональной . . . 520
27.3.1. Построение матриц K_0, λ_0 (522). 27.3.2. Определение $K_0^{[k]}$, $\lambda_0^{[k]}$ при заданных H_0 и B_k (523).

Список литературы . . . 527

Посвящаю своей верной подруге и супруге Алле Гарегиновне, без постоянной поддержки и помощи которой эта книга вряд ли была бы написана

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие прикладные задачи, с которыми приходится иметь дело на практике, связаны с рассмотрением систем дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, обычно нестационарных и имеющих нередко высокий порядок. Точное решение таких систем, даже линейных, удается получить лишь в исключительных случаях, поэтому приходится прибегать к приближенным методам интегрирования. Развитие теории в этой части идет по различным направлениям. Для линейных нестационарных систем многообещающим и плодотворным представляется применение методов асимптотического интегрирования и преобразования уравнений в сочетании с методами матричной алгебры.

В последние годы методы матричной алгебры, вслед за методами операционного исчисления, все в большей мере внедряются в прикладные науки. Это объясняется, во-первых, тем, что в матричной записи громоздкие выражения и сложные преобразования принимают компактный и ясный вид, что способствует экономному и наглядному изложению; во-вторых, аппарат матричной алгебры хорошо приспособлен для использования ЭВМ. Эти преимущества особенно заметны в случае линейных систем уравнений высокого порядка.

В принципе все те задачи, которые решаются методами матричной алгебры, могут быть решены и без использования аппарата матричного исчисления, но в последнем случае более вероятна такая ситуация, когда из-за громоздкости и сложности получающихся выражений, необходимости проведения утомительных вычислений, трудности решения задачи становятся непреодолимыми.

Сейчас имеется немало монографий по теории матриц, и все же потребность в таких книгах, где методы матричной алгебры были бы представлены в действии, в приложениях, все еще велика.

В 1973 г. издательство «Наука» выпустило мою книгу «Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем», посвященную описанию основных методов изучения систем, прежде всего линейных. Объектом рассмотрения в этой книге являлись те типы уравнений, которые обычно встречаются в механике, теории управления и в других прикладных науках.