

Содержание

Предисловие	5
1 Важнейшие тождественные равенства и неравенства	6
1.1 Алгебраические тождества и неравенства	7
1.1.1 Выделение полного квадрата $ax^2+bx+c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ или куба	8
1.1.2 Формула квадрата $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$ суммы n чисел	9
1.1.3 Формула разложения на множители разности $a^n - b^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	10
1.1.4 Формула разложения на множители суммы нечётных степеней $a^n + b^n$ ($n = 2k + 1$)	11
1.1.5 Формула разложения на множители разности чётных степеней $a^n - b^n$ ($n = 2k$)	11
1.1.6 Формула куба суммы трёх чисел $(a + b + c)^3$	11
1.1.7 Бином Ньютона $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$	12
1.1.8 Неравенство о сумме взаимно обратных чисел $\left a + \frac{1}{a}\right \geq 2$ ($a \neq 0$)	13
1.1.9 Арифметические корни n -й степени. Формула сложного радикала $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$	15
1.1.10 Представление натурального числа в различных системах счисления $n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_2 a_1 a_0} = \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i$	21
1.1.11 Тождества с НОД и НОК	22
1.1.12 Тождества и неравенства, доказываемые методом математической индукции	24
1.1.13 Тождества и неравенства с модулем	27
1.1.14 Тождества с $\max(a_1, \dots, a_n)$ и $\min(a_1, \dots, a_n)$	33
1.1.15 Среднее степенное $\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}$	34

1.1.16	Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (Коши)	
	$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, \dots$	41
1.1.17	Неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим	
	$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}, \dots$	44
1.1.18	Неравенство Коши-Буняковского	
	$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 \dots$	44
1.1.19	Неравенства Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx$	46
1.1.20	Неравенство Минковского о произведении сумм обратных чисел	
	$\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2 \dots$	48
1.1.21	Транснеравенство для одномонотонных последовательностей	
	$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$	49
1.1.22	Алгебраические задачи на разные приёмы	50
1.2	Тригонометрические тождества и неравенства	52
1.3	Логарифмические и показательные тождества и неравенства $a^{\log_a b} = b$	68
1.4	Гиперболические тождества и неравенства $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$	73
1.5	Тождества и неравенства с факториалами $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$	80
1.6	Тождества и неравенства с целой и дробной частями $x = [x] + \{x\}$	82
2	Послесловие, или Примеры ситуаций, порождающих тождественные равенства и неравенства	86
3	Ответы и решения	109
	Предметный указатель	169
	Список литературы	170