

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
<i>Часть первая. Математический анализ функций одной переменной</i>	10
<i>Глава 1. Вещественные числа</i>	10
§ 1. Множества. Обозначения. Логические символы	10
§ 2. Вещественные числа и их основные свойства	11
§ 3. Геометрическое изображение вещественных чисел	14
1. Изображение вещественных чисел точками на координатной прямой (14). 2. Некоторые наиболее употребительные числовые множества (16)	
§ 4. Грани числовых множеств	17
§ 5. Абсолютная величина числа	18
<i>Глава 2. Предел последовательности</i>	20
§ 1. Числовые последовательности	20
1. Числовые последовательности и арифметические действия над ними (20). 2. Ограниченные и неограниченные последовательности (21). 3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности (22). 4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей (24)	
§ 2. Сходящиеся последовательности	25
1. Понятие сходящейся последовательности (25). 2. Основные свойства сходящихся последовательностей (26). 3. Предельный переход в неравенствах (29)	
§ 3. Монотонные последовательности	30
1. Определение и признак сходимости монотонных последовательностей (30). 2. Число e (32)	
§ 4. Теорема о вложенных отрезках	33
<i>Глава 3. Аналитическая геометрия на плоскости</i>	34
§ 1. Прямоугольная система координат	34
§ 2. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости	35
1. Расстояние между двумя точками (35). 2. Площадь треугольника (36). 3. Деление отрезка в данном отношении (36)	
§ 3. Полярные координаты	38
§ 4. Преобразование прямоугольных координат	39
1. Параллельный сдвиг осей (39). 2. Поворот осей координат (40)	
§ 5. Уравнение линии на плоскости	41
§ 6. Линии первого порядка	43
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (43). 2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом (45). 3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (45). 4. Угол между двумя прямыми (46). 5. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (46). 6. Общее уравнение прямой (47). 7. Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках» (48). 8. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой (49)	

§ 7. Линии второго порядка	52
1. Эллипс (52). 2. Гипербола (55). 3. Директрисы эллипса и гиперболы (59). 4. Парабола (62)	
§ 8. Общее уравнение линии второго порядка	64
1. Приведение общего уравнения линии второго порядка к простейшему виду (64). 2. Инвариантность выражения $AC - B^2$. Классификация линий второго порядка (66)	
Глава 4. Функции одной переменной	69
§ 1. Понятие функции	69
1. Определение функций (69). 2. Способы задания функций (70). 3. Классификация функций (72)	
§ 2. Предел функции	73
1. Предел функций при $x \rightarrow x_0$ (73). 2. Предел функции при $x \rightarrow x_0$ — и при $x \rightarrow x_0 +$ (76). 3. Предел функции при $x \rightarrow \infty$, при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$ (77)	
§ 3. Теоремы о пределах функций	78
§ 4. Два замечательных предела	79
1. Первый замечательный предел (79). 2. Второй замечательный предел (81)	
§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	82
1. Бесконечно малые функции (82). 2. Бесконечно большие функции (83)	
§ 6. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций	84
§ 7. Понятие непрерывности функций	87
1. Определение непрерывности функции (87). 2. Арифметические действия над непрерывными функциями (88)	
§ 8. Непрерывность некоторых элементарных функций	88
1. Непрерывность рациональных функций (89). 2. Непрерывность тригонометрических функций (89). 3. Непрерывность функции $f(x) = x $ (90)	
§ 9. Классификация точек разрыва функции	91
1. Определение и классификация точек разрыва функции (91). 2. Кусочно-непрерывные функции (91)	
§ 10. Основные свойства непрерывных функций	92
1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции (92). 2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение (92). 3. Теорема об ограниченности непрерывной функции на отрезке (94). 4. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точных граней (96). 5. Понятие равномерной непрерывности функции (97). 6. Теорема о равномерной непрерывности функции (98)	
§ 11. Понятие сложной функции	100
§ 12. Понятие обратной функции	101
1. Определение обратной функции (101). 2. Теорема о непрерывности обратной функции (102)	
Глава 5. Дифференцирование	104
§ 1. Понятие производной	104
1. Определение производной (104). 2. Геометрический смысл производной (105). 3. Физический смысл производной (106). 4. Правая и левая производные (107)	
§ 2. Понятие дифференцируемости функции	107
1. Понятие дифференцируемости функции в данной точке (107). 2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности (108)	
§ 3. Понятие дифференциала	109
1. Определение и геометрический смысл дифференциала (109). 2. Приближенные вычисления с помощью дифференциала (110)	

§ 4. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного	111
§ 5. Вычисление производных постоянной, степенной, тригонометрических функций и логарифмической функции	112
1. Производная постоянной функции (112). 2. Производная степенной функции (112). 3. Производные тригонометрических функций (113). 4. Производная логарифмической функции (114)	
§ 6. Теорема о производной обратной функции	114
§ 7. Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций	115
1. Производная показательной функции (115). 2. Производные обратных тригонометрических функций (116)	
§ 8. Правило дифференцирования сложной функции	116
§ 9. Логарифмическая производная. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Таблица производных простейших элементарных функций	118
1. Понятие логарифмической производной функции (118). 2. Производная степенной функции с любым вещественным показателем (119). 3. Таблица производных простейших элементарных функций (120)	
§ 10. Производные и дифференциалы высших порядков	120
1. Понятие производной n -го порядка (120). 2. Формулы для n -х производных некоторых функций (121). 3. Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций (122). 4. Дифференциалы высших порядков (123)	
§ 11. Параметрическое задание функции и ее дифференцирование	125
1. Параметрическое задание функции (125). 2. Дифференцирование функции, заданной параметрически (126)	

Глава 6. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций

§ 1. Основные теоремы дифференциального исчисления	127
§ 2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя	131
1. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (131). 2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ (133). 3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие (134)	
§ 3. Формула Тейлора	135
1. Формула Тейлора (135). 2. Другая запись формулы Тейлора и остаточного члена (137). 3. Формула Маклорена (137). 4. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена (138). 5. Использование формулы Маклорена для вычисления пределов (139). 6. Вычисление числа e (139)	
§ 4. Исследование поведения функций и построение графиков	140
1. Признак монотонности функции (140). 2. Отыскание точек локального экстремума функции (140). 3. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции (143). 4. Асимптоты графика функции (146). 5. Схема исследования графика функции (149)	
§ 5. Интерполяция функций	151
1. Постановка задачи (151). 2. Интерполяционная формула Лагранжа (152). 3. Интерполяционная формула Ньютона (153). 4. Остаточный член интерполяции (155)	
§ 6. Методы приближенного вычисления корней уравнений	156
1. Метод «вилки» (156). 2. Метод касательных (157)	

Глава 7. Неопределенный интеграл	159
§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл	159
1. Понятие первообразной функции (159). 2. Неопределенный интеграл (160)	
§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла	161
§ 3. Таблица основных интегралов	162
§ 4. Основные методы интегрирования	163
1. Непосредственное интегрирование (163). 2. Метод подстановки (163). 3. Метод интегрирования по частям (165)	
§ 5. Интегрирование рациональных функций	167
§ 6. Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций	172
1. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ (172). 2. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ (173). 3. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ (175). 4. Интеграл вида $\int R(e^x) dx$ (176)	

Глава 8. Определенный интеграл	177
§ 1. Определение определенного интеграла	177
§ 2. Условия существования определенного интеграла	179
1. Ограниченность интегрируемой функции (179). 2. Суммы Дарбу (180). 3. Свойства сумм Дарбу (181). 4. Необходимое и достаточное условие интегрируемости (183)	
§ 3. Интегрируемость непрерывных и некоторых разрывных функций	184
§ 4. Основные свойства определенного интеграла	186
§ 5. Оценки интегралов. Формула среднего значения	188
1. Оценки интегралов (188). 2. Формула среднего значения (190)	
§ 6. Интеграл с переменным верхним пределом	191
§ 7. Формула Ньютона—Лейбница	192
§ 8. Замена переменной в определенном интеграле	194
§ 9. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле	196
§ 10. Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла	197
1. Площадь криволинейной трапеции (197). 2. Площадь криволинейного сектора (200). 3. Длина дуги кривой (201). 4. Объем тела вращения (204). 5. Площадь поверхности вращения (205). 6. Работа переменной силы (207)	
§ 11. Несобственные интегралы	209
1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (209). 2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (211). 3. Признак сходимости несобственных интегралов (212). 4. Пример использования несобственного интеграла (214)	
§ 12. Приближенное вычисление определенных интегралов	215
1. Формула трапеций (215). 2. Формула парабол (217)	

Часть вторая. Математический анализ функций нескольких переменных	222
--	-----

Глава 9. Аналитическая геометрия в пространстве	222
§ 1. Прямоугольная система координат в пространстве	222
§ 2. Понятие вектора	223
1. Скалярные и векторные величины (223). 2. Определение вектора (223). 3. Проекция вектора на ось (224). 4. Проекции вектора на оси координат (225). 5. Направляющие косинусы вектора (225)	
§ 3. Линейные операции над векторами и их основные свойства	226
1. Сложение двух векторов (226). 2. Произведение вектора на число (227). 3. Основные свойства линейных операций (227)	
§ 4. Теоремы о проекциях векторов	229
§ 5. Разложение вектора по базису	231.

§ 6. Скалярное произведение векторов	231
1. Определение и основные свойства скалярного произведения (231).	
2. Выражение скалярного произведения через координаты векторов (234)	
§ 7. Векторное произведение	235
1. Определение векторного произведения (235). 2. Основные свойства векторного произведения (236). 3. Выражение векторного произведения через координаты векторов (238)	
§ 8. Смешанное произведение трех векторов	239
1. Определение и геометрический смысл смешанного произведения (239). 2. Выражение смешанного произведения через координаты векторов (240)	
§ 9. Уравнения поверхности и линии	241
§ 10. Уравнение цилиндрической поверхности	242
§ 11. Уравнения плоскости	244
1. Общее уравнение плоскости (244). 2. Угол между двумя плоскостями (245). 3. Условие параллельности плоскостей (245). 4. Условие перпендикулярности плоскостей (246). 5. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости (246)	
§ 12. Уравнение прямой	248
1. Канонические уравнения прямой (248). 2. Параметрические уравнения прямой (250). 3. Угол между прямыми (250). 4. Условия параллельности прямых (251). 5. Условия перпендикулярности прямых (251). 6. Расстояние от точки до прямой (251).	
§ 13. Взаимное расположение прямой и плоскости	251
1. Условия параллельности и перпендикулярности (251). 2. Угол между прямой и плоскостью (252)	
§ 14. Поверхности второго порядка	252
1. Эллипсоид (252). 2. Однополостный гиперболоид (253). 3. Двуполостный гиперболоид (254). 4. Эллиптический параболоид (255). 5. Гиперболический параболоид (256). 6. Конус второго порядка (258)	
<i>Глава 10. Элементы высшей алгебры</i>	<i>259</i>
§ 1. Матрицы	259
1. Определение матрицы (259). Свойства матриц (261)	
§ 2. Определители	263
1. Определение определителя (263). 2. Свойства определителей (264)	
§ 3. Исследование системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными	268
§ 4. Матричная запись системы линейных уравнений. Понятие обратной матрицы	272
<i>Глава 11. Предел и непрерывность функций нескольких переменных</i>	<i>275</i>
§ 1. Понятие функции нескольких переменных	275
1. Вводные замечания (275). 2. Определение функции двух и более переменных (275)	
§ 2. Геометрическое изображение функции двух переменных	277
§ 3. Предел функции двух переменных	278
§ 4. Непрерывность функции двух переменных	281
1. Определение непрерывности функции двух переменных (281). 2. Основные свойства непрерывных функций двух переменных (282)	
<i>Глава 12. Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных</i>	<i>284</i>
§ 1. Частные производные	284
§ 2. Понятие дифференцируемости функции	285

1. Определение дифференцируемости (285). 2. Необходимые условия дифференцируемости (286). 3. Достаточные условия дифференцируемости (287)	
§ 3. Производные сложных функций	288
§ 4. Дифференциал функции	291
1. Определение дифференциала (291). 2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала (292)	
§ 5. Производная по направлению. Градиент	293
§ 6. Частные производные и дифференциалы высших порядков	296
1. Частные производные высших порядков (296). 2. Дифференциалы высших порядков (298)	
§ 7. Формула Тейлора для функции двух переменных	299
§ 8. Экстремумы функции двух переменных	301
1. Определение экстремума (301). 2. Необходимые условия экстремума (301). 3. Достаточные условия экстремума (302)	
§ 9. Метод наименьших квадратов	304

Глава 13. Интегрирование 307

§ 1. Двойные интегралы	307
1. Определение и условия существования двойного интеграла (307). 2. Геометрический смысл двойного интеграла (308). 3. Свойства двойного интеграла (309).	
§ 2. Сведение двойного интеграла к повторному	310
1. Случай прямоугольной области (310). 2. Случай криволинейной области (312)	
§ 3. Замена переменных в двойном интеграле	314
§ 4. Некоторые геометрические и физические приложения двойных интегралов	317
1. Вычисление объема (317). 2. Вычисление площади (317). 3. Вычисление площади поверхности (319). 4. Вычисление массы пластины (321). 5. Вычисление координат центра масс пластины (322). 6. Вычисление момента инерции пластины (323)	
§ 5. Криволинейные интегралы	324
1. Определение криволинейного интеграла первого рода (325). 2. Вычисление криволинейных интегралов первого рода (327). 3. Определение криволинейного интеграла второго рода (328). 4. Вычисление криволинейных интегралов второго рода (332). 5. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода (333)	
§ 6. Формула Грина	334
§ 7. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования	336
§ 8. Интегрирование полных дифференциалов	340
§ 9. Некоторые приложения криволинейных интегралов второго рода	341
1. Вычисление площади с помощью формулы Грина (344). 2. Работа силы (345)	
§ 10. Тройные интегралы	346
1. Определение тройного интеграла (347). 2. Вычисление тройных интегралов (347). 3. Замена переменных в тройном интеграле (349). 4. Некоторые приложения тройных интегралов (352)	
§ 11. Поверхностные интегралы	353
1. Определение поверхностного интеграла первого рода (353). 2. Вычисление поверхностных интегралов первого рода (355). 3. Определение поверхностного интеграла второго рода (356). 4. Вычисление поверхностных интегралов второго рода (359). 5. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода (361)	
§ 12. Формула Остроградского	362
§ 13. Формула Стокса	365

§ 14. Скалярное и векторное поля	368
1. Скалярное поле (368). 2. Векторное поле (369). 3. Потенциальное поле (369). 4. Задача о потоке векторного поля (371). 5. Дивергенция (372). 6. Циркуляция, Ротор (374). 7. Оператор Гамильтона (376)	
<i>Часть третья. Ряды, дифференциальные уравнения</i>	379
<i>Глава 14. Ряды</i>	379
§ 1. Понятие числового ряда	379
1. Основные определения (379). 2. Свойства сходящихся рядов (381)	
3. Необходимое условие сходимости ряда (382)	
§ 2. Ряды с неотрицательными членами	383
§ 3. Знакопередающиеся ряды	389
§ 4. Абсолютная и условная сходимость рядов	390
§ 5. Степенные ряды	391
1. Определение и общие замечания (391). 2. Интервал сходимости степенного ряда (392). 3. Свойства степенных рядов (395). 4. Разложение функций в степенные ряды (396)	
§ 6. Комплексные ряды	402
1. Краткие сведения о комплексных числах (402). 2. Предел последовательности комплексных чисел (405). 3. Числовые ряды с комплексными членами (406). 4. Степенные ряды с комплексными членами (407). 5. Формулы Эйлера (408)	
§ 7. Ряды Фурье	410
1. Тригонометрический ряд и его основные свойства (410). 2. Ряд Фурье (411). 3. Сходимость ряда Фурье (412). 4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций (413). 5. Ряд Фурье с периодом $2l$ (415)	
<i>Глава 15. Обыкновенные дифференциальные уравнения</i>	416
§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка	417
1. Определение дифференциального уравнения первого порядка (417). 2. Решение уравнения. Задача Коши (418). 3. Общее и частное решения уравнения (418). 4. Геометрический смысл уравнения (420). 5. Уравнения с разделяющимися переменными (421). 6. Линейные уравнения (422). 7. Уравнения в полных дифференциалах (423). 8. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера (425). 9. Некоторые применения дифференциальных уравнений первого порядка (428)	
§ 2. Дифференциальные уравнения второго порядка	431
1. Основные понятия (431). 2. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка (432). 3. Дифференциальные уравнения высших порядков (434)	
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	435
1. Основные понятия (435). 2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка (436). 3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка (440)	
§ 4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	443
1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (443). 2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (445)	
§ 5. Применение линейных дифференциальных уравнений к изучению колебательных явлений	449
Предметный указатель	455
Указатель основных обозначений	463
Основные формулы	465