

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Глава 1. Самые простые дифференциальные уравнения	16
1.1. Интеграл и дифференциальное уравнение	16
1.2. Ламинарное течение жидкости в трубе и безразмерное число Рейнольдса	17
1.3. Сердце и другие насосы. Безразмерное число Уомерсли	28
1.4. Течения с переменной вязкостью	30
1.5. Турбулентность и измерения	31
Глава 2. Эволюционные дифференциальные уравнения	35
2.1. Векторное поле, эволюционное уравнение и задача Коши	35
2.2. Распад изотопа и экспонента	37
2.3. Возможная неединственность (ветвление) решения задачи Коши	38
2.4. Банковский процент, начисляемый непрерывно и дискретно	39
2.5. Модель Мальтуса	40
2.6. Классификация дифференциальных уравнений и систем	41
2.7. Стационарные точки и их устойчивость по Ляпунову	43
2.8. Устойчивость произвольных решений	46
2.9. Движение небесных тел и разностная схема Эйлера	46
2.10. Движение небесных тел и законы сохранения (первые интегралы) модели	47
2.11. Уравнения, не разрешенные относительно производной	52
2.12. Стационарные (неподвижные) точки при дискретном времени и их устойчивость	54
2.13. Групповое свойство автономных систем	57
Глава 3. Линейные дифференциальные уравнения и принцип суперпозиции	60
3.1. Линейный дифференциальный оператор и линейная система	60
3.2. Комплексные линейные дифференциальные уравнения и системы	64
3.3. Подпространство решений однородного уравнения и плоскость — неоднородного	66
3.4. Системы и уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен	67
3.5. Случай кратных характеристических корней и устойчивость начала координат	68
3.6. Уравнение Эйлера. Как иногда можно сделать коэффициенты дифференциального уравнения постоянными?	70
3.7. Крутильные колебания вала с дисками и двойные маятники	75
3.8. Эволюция подпространств	77

3.9. Фундаментальная система решений, вронскиан и эволюция объема — формула Лиувилля–Остроградского	80
3.10. Простейшие неоднородные уравнения	85
3.11. Инерция измерительного прибора	86
3.12. Решение неоднородных уравнений — матрица Вронского и метод вариации постоянных	89
3.13. Измерительный прибор с переменной инерцией и закон охлаждения Ньютона	90
3.14. Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами, когда форсинг — квазимногочлен	94
3.15. Периодические коэффициенты. Преобразование монодромии и устойчивость нулевого решения. Мультипликаторы	96
Глава 4. Модели войн	99
4.1. Модель Ланкастера	99
4.2. Война двух орд. Фазовые портреты	102
4.3. Модификации модели Ланкастера	106
Глава 5. Устойчивость стационарных точек — классификация	112
5.1. Классификация линейных векторных полей (матриц Якоби) для 2-го порядка	112
5.2. Устойчивость стационарных точек нелинейных систем — теорема Ляпунова	119
5.3. Устойчивость для систем большего порядка	119
5.4. Стабилизация стационарной точки и возмущение спектра матрицы	121
5.5. Структурная устойчивость и общее положение	124
5.6. Понятие коразмерности поверхностей	128
5.7. Устойчивость неподвижных и периодических точек систем с дискретным временем	130
Глава 6. Метод разделения переменных и рост живых организмов	133
6.1. Метод разделения переменных и серебряные часы Лейбница	133
6.2. Что считать решением дифференциального уравнения	137
6.3. Уравнение фон Берталанфи и асимптотическая устойчивость стационарной точки	142
6.4. Уравнение Гомперца	144
6.5. Виктория-регия — ограничения модели	146
Глава 7. Рост популяций	148
7.1. Рост популяции — конечно-разностная модель Фибоначчи	148
7.2. Модель Лесли динамики распределения по возрастам. Теоремы Перрона и Фробениуса	152
7.3. Логистическое уравнение. Жесткая и мягкая модели лова	157
7.4. Модель Басса рекламной кампании	162

Глава 8. Скорость химических реакций	163
8.1. Что влияет на скорость реакций	163
8.2. Первый интеграл и понижение порядка системы дифференциальных уравнений	168
8.3. Разностный метод Эйлера приближенного решения задачи Коши	171
Глава 9. Полезные замены переменных, затопленная струя и охота	177
9.1. Простейшие замены в дифференциальных уравнениях	177
9.2. Сведение дифференциального уравнения Бернулли к линейному и задача о затопленной струе	178
9.3. Уравнения, в которых можно заменой понизить порядок. Линия погони и уравнения вида $\frac{d^2u}{dt^2} + Z\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + f(u) = 0$	183
9.4. Понижение порядка линейного уравнения при условии, что одно нетривиальное его решение уже известно	188
9.5. Можно ли аналитически решить уравнение Риккати?	190
9.6. Приведение линейного дифференциального уравнения к самосопряженной форме и разностная аппроксимация линейного дифференциального уравнения	194
9.7. Компактные разностные схемы	201
9.8. Однородные уравнения и полярные координаты	202
Глава 10. Дифференциальные и разностные операторы — операторы в бесконечномерном пространстве	207
10.1. Спектр дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами	207
10.2. Какие собственные функции считать допустимыми	209
10.3. Спектр дифференциальных операторов с переменными коэффициентами	210
10.4. Конечно-разностные линейные операторы	213
10.5. Нелинейные разностные уравнения: дискретная динамика Ферхюльста и удвоение цикла	217
10.6. Неявная схема для дискретной динамики Ферхюльста	223
Глава 11. Эволюция вероятностей и марковские цепи	225
11.1. Марковские цепи и матрицы перехода	225
11.2. Спектр матрицы перехода	230
11.3. Конечно-разностные уравнения и оценка спектра	232
11.4. Марковские цепи с непрерывным временем	234
Глава 12. Модель экономики Солоу	237
12.1. Население, капитал и производство	237
12.2. Свойства решений модели Солоу	238
12.3. Случай функций Кобба–Дугласа	240
12.4. Учет прожиточного минимума в динамике численности	242

Глава 13. Кто как летает: камни, ракеты, электроны...	244
13.1. Полет пушечного ядра	244
13.2. Полет ракеты.	246
13.3. Циклоида: полет заряженной частицы в электромагнитном поле и перемещение точки на колесе	249
13.4. Движение заряженной частицы в быстроосциллирующем электромагнитном поле. Сила Миллера	260
Глава 14. Почему и как давление убывает с высотой	264
14.1. Уравнения для воздуха	264
14.2. Барометрическая формула	266
14.3. Закон Архимеда и кораблестроение	268
Глава 15. Зачем канат обматывают вокруг столба	271
15.1. Формула Эйлера для силы трения каната, перекинутого через бревно	271
15.2. Балки с некруглым сечением, кривые в $\mathbb{R}^2$ и их кривизна	276
15.3. Кривые в пространстве	281
15.4. Канат на заданной поверхности	285
Глава 16. Миг удара	289
16.1. Сколько времени длится удар	289
16.2. Задача Герца	290
16.3. Свойства гамма-функции Эйлера	294
Глава 17. Уравнения, описывающие колебания	296
17.1. Гармонические колебания	296
17.2. Нелинейные колебания	298
17.3. Модель Лотки–Вольтерра	304
17.4. Матрица Гессе и лемма Морса для стационарных (критических) точек гладкой функции	306
17.5. Период малых колебаний популяций в модели Лотки–Вольтерра	311
17.6. Модифицированная модель Лотки–Вольтерра	312
17.7. Динамика опухолевых клеток	316
17.8. Гармонический форсинг и возможность резонанса	322
Глава 18. Приближенные решения дифференциальных уравнений в виде отрезка ряда Ньютона–Тейлора	326
18.1. Последовательное уточнение решения	326
18.2. Сходимость рядов Ньютона–Тейлора	328
18.3. Аппроксимация решения рациональной функцией	330
18.4. Асимптотика решения дифференциального уравнения с особенностью. Дробные степени	332

18.5. Решения уравнений Бесселя	333
18.6. Ряд Ньютона–Тейлора может расходиться везде. Пример Коши	335
18.7. Комплексные дифференциальные уравнения и голоморфность	338
Глава 19. Сжимающие отображения: метод Пикара–Линделёфа и метод Ньютона	340
19.1. Неограниченные линейные операторы.	340
19.2. Интегральное уравнение Вольтерра и метод Пикара–Линделёфа.	342
19.3. Теорема Пикара–Линделёфа о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем	345
19.4. Оценка отклонений решения задачи Коши при изменении правой части уравнения	346
19.5. Сжимающие отображения и неподвижная точка. Метод Ньютона.	348
19.6. Сжимающие отображения и неподвижная точка в пространстве функций. Метод Пикара–Линделёфа.	352
Глава 20. Что мы хотим знать о решении? Корректность и уравнения в вариациях.	354
20.1. Зависимость решения дифференциального уравнения от параметра и уравнения в вариациях	354
20.2. Определение параметра задачи	361
20.3. Эволюция фазового объема в нелинейных системах	363
20.4. Гамильтоновы системы.	366
20.5. Предельные циклы, отображение Пуанкаре и теорема Понтрягина	372
20.6. Реакция типа Белоусова–Жаботинского и предельный цикл	380
20.7. Бифуркация Пуанкаре–Андронova–Хопфа рождения цикла	383
Глава 21. Разностные аппроксимации линейных дифференциальных уравнений и аппроксимации Паде.	391
21.1. Методы разностной аппроксимации производных	391
21.2. Компактные схемы разностной аппроксимации	396
21.3. Дифференцирование функций с «шумом»	398
21.4. Схемы Эйлера и Кранка–Николсон разностной аппроксимации дифференциального уравнения	404
21.5. Классификация разностных аппроксимаций и аппроксимация Паде.	407
21.6. Многослойные схемы и аппроксимация Паде–Эрмита	414
Глава 22. Разностное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.	417
22.1. Погрешность и порядок аппроксимации	417
22.2. Погрешность построения начальных условий для многослойной схемы	419
22.3. Схемы Рунге–Кутты.	420
22.4. Устойчивость и сходимость	425

Глава 23. Движение планет и других шариков	428
23.1. Движение по желобу и форма изохроны	428
23.2. Брахистохрона и рефракция	430
23.3. Трамплины	435
23.4. Движение по склону	438
23.5. Движение в поле центральной силы	441
23.6. Случай Якоби, ряд Фурье и условие разрешимости	444
23.7. Эффективная потенциальная энергия. Апогей и перигей	446
Глава 24. Градиентные системы и системы с трением	454
24.1. Минимизация функции методом тяжелого шарика	454
24.2. Жесткие задачи	460
24.3. Минимизация методом градиентного спуска и градиентные системы дифференциальных уравнений	460
24.4. Аттракторы систем дифференциальных уравнений	462
24.5. Нелинейное трение	470
24.6. Гармонический форсинг и переменный электрический ток	472
24.7. Длинные электрические цепи и конечно-разностные уравнения	478
24.8. Нелинейные электрические цепи	483
Глава 25. Системы с разрывной правой частью — режимы с переключением	487
25.1. Грузик на пружине с трением о поверхность	487
25.2. Аттрактор системы	489
25.3. Оптимальное распределение ресурса между производственными отраслями — простейшая модель	491
Глава 26. Уравнения с особенностями	493
26.1. Особая точка линейного дифференциального уравнения	493
26.2. Теория Фробениуса	495
26.3. Особая точка линейных уравнений на бесконечности и гипергеометрическая функция	502
26.4. Преобразование Лиувилля. Можно ли сделать коэффициенты почти постоянными?	504
Глава 27. Сращивание асимптотик	509
27.1. Двухточечные и многоточечные интерполяции и аппроксимации	509
27.2. Двухточечная рациональная аппроксимация при $b = \infty$. Аппроксимация функции Планка	512
27.3. Двухточечная рациональная аппроксимация решения дифференциального уравнения	515
27.4. Сращивание разных асимптотик на $\pm\infty$. Сигмоиды	517
Список литературы	519
Предметный указатель	524