

# Оглавление

Введение

10

## Часть I. Предварительные сведения

<b>Глава 1. Голоморфные функции многих переменных</b>	<b>30</b>
§ 1.1. Голоморфные функции одной переменной . . . . .	31
1. Определение и основные свойства (31). 2. Основания предмета: формула Стокса (33). 3. Формула Коши (36).	
§ 1.2. Голоморфные функции нескольких переменных . . . . .	37
1. Формула Коши и аналитичность (37). 2. Применения формулы Коши (40).	
§ 1.3. Уравнение $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f$ . . . . .	45
Упражнения . . . . .	46
<b>Глава 2. Комплексные многообразия</b>	<b>48</b>
§ 2.1. Многообразия и векторные расслоения . . . . .	49
1. Определения (49). 2. Касательное расслоение (51). 3. Комплексные многообразия (53).	
§ 2.2. Интегрируемость почти комплексных структур . . . . .	54
1. Касательное расслоение комплексного многообразия (54). 2. Теорема Фробениуса (57). 3. Теорема Ньюлендера—Ниренберга (61).	
§ 2.3. Операторы $\partial$ и $\bar{\partial}$ . . . . .	64
1. Определение (64). 2. Локальная точность (66). 3. Комплекс Дольбо голоморфного расслоения (68).	
§ 2.4. Примеры комплексных многообразий . . . . .	70
Упражнения . . . . .	72
<b>Глава 3. Кэлеровы метрики</b>	<b>74</b>
§ 3.1. Определения и основные свойства . . . . .	76
1. Эрмитова геометрия (76). 2. Эрмитовы и кэлеровы метрики (77). 3. Основные свойства (78).	

§ 3.2.	Свойства кэлеровых метрик . . . . .	80
1.	Основания предмета: связности (80). 2. Кэлеровы метрики и связности (82).	
§ 3.3.	Примеры кэлеровых многообразий . . . . .	86
1.	Форма Чженя линейного расслоения (86). 2. Метрика Фубини—Штуди (87). 3. Раздутия (89).	
Упражнения	. . . . .	94
<b>Глава 4.</b>	<b>Пучки и когомологии</b>	<b>95</b>
§ 4.1.	Пучки . . . . .	97
1.	Определения и примеры (97). 2. Слои, ядра, образы (102).	
3.	Резольвенты (103).	
§ 4.2.	Функторы и производные функторы . . . . .	107
1.	Абелевы категории (107). 2. Инъективные резольвенты (108). 3. Производные функторы (111).	
§ 4.3.	Когомологии пучков . . . . .	114
1.	Ациклические резольвенты (115). 2. Теоремы де Рама (120). 3. Интерпретации группы $H^1$ (123).	
Упражнения	. . . . .	126
<b>Часть II. Разложение Ходжа</b>		
<b>Глава 5.</b>	<b>Гармонические формы и когомологии</b>	<b>129</b>
§ 5.1.	Оператор Лапласа . . . . .	130
1.	$L^2$ -метрика (130). 2. Формально сопряженные операторы (133). 3. Операторы, сопряженные к $\bar{\partial}$ (133). 4. Лапласианы (136).	
§ 5.2.	Эллиптические дифференциальные операторы . . . . .	137
1.	Символ дифференциального оператора (137). 2. Символ оператора Лапласа (138). 3. Основная теорема (140).	
§ 5.3.	Приложения . . . . .	141
1.	Когомологии и гармонические формы (141). 2. Теоремы двойственности (142).	
Упражнения	. . . . .	148
<b>Глава 6.</b>	<b>Случай кэлеровых многообразий</b>	<b>150</b>
§ 6.1.	Разложение Ходжа . . . . .	151
1.	Кэлеровы тождества (151). 2. Сравнение лапласианов (154). 3. Другие применения (155).	
§ 6.2.	Разложение Лефшеца . . . . .	157

1. Коммутаторы (157). 2. Разложение Лефшеца для форм (159). 3. Разложение Лефшеца для когомологий (161).	
§ 6.3. Теорема Ходжа об индексе . . . . .	163
1. Новые эрмитовы тождества (163). 2. Теорема Ходжа об индексе (165).	
Упражнения . . . . .	167
<b>Глава 7. Структуры Ходжа и поляризации</b>	<b>169</b>
§ 7.1. Определения и основные свойства . . . . .	170
1. Структура Ходжа (170). 2. Поляризация (173). 3. Поляризованные многообразия (174).	
§ 7.2. Примеры . . . . .	180
1. Проективное пространство (180). 2. Структуры Ходжа веса 1 и абелевы многообразия (182). 3. Структуры Ходжа веса 2 (185).	
§ 7.3. Функториальность . . . . .	189
1. Морфизмы структур Ходжа (189). 2. Обратный образ и морфизм Гизина (191). 3. Структуры Ходжа и раздутие (195).	
Упражнения . . . . .	197
<b>Глава 8. Голоморфный комплекс де Рама</b>	<b>199</b>
§ 8.1. Гиперкогомологии . . . . .	201
1. Резольвенты комплексов (201). 2. Производные функторы (204). 3. Композиции функторов (210).	
§ 8.2. Голоморфные комплексы де Рама . . . . .	211
1. Голоморфные резольвенты де Рама (211). 2. Логарифмический случай (212). 3. Когомологии логарифмического комплекса (213).	
§ 8.3. Фильтрации и спектральные последовательности . . . . .	215
1. Комплексы с фильтрацией (215). 2. Спектральные последовательности (217). 3. Спектральная последовательность Фрёлихера (220).	
§ 8.4. Теория Ходжа для открытых многообразий . . . . .	224
1. Фильтрации на логарифмическом комплексе (224). 2. Первые члены спектральной последовательности (225). 3. Теорема Делиня (230).	
Упражнения . . . . .	231

### Часть III. Вариации структур Ходжа

<b>Глава 9. Семейства и деформации</b>	<b>235</b>
§ 9.1. Семейства многообразий . . . . .	236
1. Тривиализации (236). 2. Отображение Кодаиры—Спенсера (239).	
§ 9.2. Связность Гаусса—Манина . . . . .	245
1. Локальные системы и плоские связности (245). 2. Формула Ли—Картана (248).	
§ 9.3. Кэлеров случай . . . . .	250
1. Теоремы полунепрерывности (250). 2. Постоянство чисел Ходжа (252). 3. Устойчивость кэлеровых многообразий (254).	
<b>Глава 10. Вариации структур Ходжа</b>	<b>256</b>
§ 10.1. Область периодов и отображение периодов . . . . .	257
1. Грассманианы (257). 2. Отображение периодов (260). 3. Области периодов (263).	
§ 10.2. Вариации структур Ходжа . . . . .	267
1. Расслоения Ходжа (267). 2. Трансверсальность (268). 3. Вычисление дифференциала (269).	
§ 10.3. Приложения . . . . .	271
1. Кривые (271). 2. Многообразия Калаби—Яу (276).	
Упражнения . . . . .	278

### Часть IV. Циклы и классы циклов

<b>Глава 11. Классы Ходжа</b>	<b>280</b>
§ 11.1. Классы циклов . . . . .	281
1. Аналитические подмножества (281). 2. Классы когомологий (287). 3. Случай кэлеровых многообразий (291). 4. Другие подходы (293).	
§ 11.2. Классы Чженя . . . . .	293
1. Конструкция классов Чженя (293). 2. Случай кэлеровых многообразий (297).	
§ 11.3. Классы Ходжа . . . . .	297
1. Определения и примеры (297). 2. Гипотеза Ходжа (302). 3. Соответствия (304).	
Упражнения . . . . .	306

<b>Глава 12. Когомологии Делиня—Бейлинсона</b>	<b>309</b>
§ 12.1. Отображение Абеля—Якоби . . . . .	310
1. Промежуточные якобианы (310). 2. Отображение Абеля—Якоби (311). 3. Многообразия Пикара и Альбанезе (315).	
§ 12.2. Свойства . . . . .	320
1. Соответствия (320). 2. Некоторые результаты (322).	
§ 12.3. Когомологии Делиня . . . . .	324
1. Комплекс Делиня (324). 2. Дифференциальные характе- ры (326). 3. Класс цикла (331).	
Упражнения . . . . .	333
<b>Список литературы</b>	<b>335</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>340</b>