

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	8
ВВЕДЕНИЕ	10
Глава 1. ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ	13
§ 1.1. Аппроксимация дифференциальных уравнений	13
1.1.1. Непосредственная аппроксимация	13
1.1.2. Достаточные условия второго порядка аппроксимации ...	15
§ 1.2. Интегро-интерполяционный метод	17
1.2.1. Построение разностной схемы	17
1.2.2. Консервативные и неконсервативные разностные схемы	20
§ 1.3. Исследование аппроксимации и сходимости	22
1.3.1. Аппроксимация дифференциального уравнения	22
1.3.2. Аппроксимация граничного условия	24
1.3.3. Уравнение для погрешности	26
§ 1.4. Метод прогонки	28
§ 1.5. Разностные операторы и их свойства	31
1.5.1. Разностные тождества	31
1.5.2. Оператор второй разностной производной	33
1.5.3. Задача на собственные значения	34
1.5.4. Свойства собственных значений и собственных функций	37
1.5.5. Операторные неравенства	40
§ 1.6. Нестационарные задачи	43
1.6.1. Разностные схемы для уравнения теплопроводности	43
1.6.2. Трехслойные разностные схемы	52

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	
ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ	59
§ 2.1. Разностная задача	59
§ 2.2. Погрешность аппроксимации и погрешность схемы	60
§ 2.3. Устойчивость и сходимость	64
Глава 3. ПРИНЦИП МАКСИМУМА	
ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ	67
§ 3.1. Разностная аппроксимация задачи Дирихле	68
3.1.1. Постановка разностной задачи	68
3.1.2. Канонический вид разностного уравнения	70
§ 3.2. Основные теоремы	71
3.2.1. Исходные предположения	71
3.2.2. Принцип максимума и его следствия	73
3.2.3. Теорема сравнения. Устойчивость по граничным условиям	76
3.2.4. Примеры	78
§ 3.3. Сходимость разностной задачи Дирихле	79
3.3.1. Устойчивость по граничным условиям	79
3.3.2. Устойчивость по правой части и сходимость	81
§ 3.4. Непрямоугольная область. Оценка погрешности	83
3.4.1. Разностная схема	83
3.4.2. Каноническая форма	87
3.4.3. Принцип максимума. Уточненные оценки по правой части	89
3.4.4. Оценка погрешности в случае непрямоугольной области	92
§ 3.5. Примеры применения принципа максимума	95
§ 3.6. Монотонные разностные схемы	99
Глава 4. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ	104
§ 4.1. Разностные задачи на собственные значения	104
4.1.1. Одномерная задача	104
4.1.2. Пятиточечный разностный оператор Лапласа	106
4.1.3. Оценки собственных значений	108
§ 4.2. Исследование устойчивости и сходимости схемы с весами для уравнения теплопроводности	111
4.2.1. Исходная задача и разностная схема	111
4.2.2. Устойчивость схемы по начальным данным	113
4.2.3. Устойчивость по правой части и сходимость	116

4.2.4. Схема с весами для двумерного уравнения теплопроводности	118
§ 4.3. Асимптотическая устойчивость	120
Глава 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ	127
§ 5.1. Оценки скорости сходимости итерационных методов	128
5.1.1. Скорость сходимости итерационного метода	128
5.1.2. Правила действий с матричными неравенствами	129
5.1.3. Оценки скорости сходимости в случае симметричных матриц A и B	131
§ 5.2. Применение стандартных методов	136
5.2.1. Модельная задача	136
5.2.2. Метод Якоби	137
5.2.3. Метод Зейделя	139
5.2.4. Метод верхней релаксации	142
§ 5.3. Явный итерационный метод	147
5.3.1. Явный итерационный метод с чебышевскими параметрами	147
5.3.2. Применение к модельной задаче	149
5.3.3. Применение явного метода к разностным аппроксимациям уравнений эллиптического типа	151
§ 5.4. Попеременно-треугольный итерационный метод	155
5.4.1. Алгебраическая теория	155
5.4.2. Применение к модельной задаче	159
5.4.3. Попеременно-треугольный метод с чебышевскими итерационными параметрами	163
5.4.4. Модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод	164
§ 5.5. Итерационный метод переменных направлений	167
5.5.1. Формулировка метода и исследование сходимости	167
5.5.2. Пример	170
5.5.3. Случай прямоугольной области	172
§ 5.6. Решение разностного уравнения методом Фурье	178
§ 5.7. Быстрое дискретное преобразование Фурье	180
§ 5.8. Решение разностного уравнения Пуассона	184
§ 5.9. Метод матричной прогонки	186
5.9.1. Введение	186
5.9.2. Запись разностного уравнения Пуассона в виде системы векторных уравнений	187
5.9.3. Алгоритм матричной прогонки	190

5.9.4. Устойчивость матричной прогонки	192
§ 5.10. Метод редукции	195
5.10.1. Вывод основных формул	195
5.10.2. Обращение матриц	198
5.10.3. Вычисление правых частей	201
5.10.4. Формулировка и обсуждение алгоритма	202
Глава 6. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ	209
§ 6.1. Разностные схемы как операторные уравнения	209
6.1.1. Представление разностных схем в виде операторных уравнений	209
6.1.2. Корректность операторных уравнений	213
6.1.3. Операторы первой разностной производной	216
§ 6.2. Канонический вид и условия устойчивости двуслойных разностных схем	218
6.2.1. Канонический вид двуслойных разностных схем	218
6.2.2. Устойчивость разностных схем	222
6.2.3. Теорема об устойчивости по начальным данным	224
6.2.4. Несамосопряженные разностные схемы	228
§ 6.3. Канонический вид и условия устойчивости трехслойных разностных схем	233
6.3.1. Канонический вид	233
6.3.2. Эквивалентность трехслойной схемы двуслойной	235
6.3.3. Устойчивость по начальным данным	237
6.3.4. Примеры	239
§ 6.4. Экономичные методы решения многомерных нестационарных задач математической физики	242
6.4.1. Недостатки обычных разностных методов	242
6.4.2. Пример метода переменных направлений	246
6.4.3. Абсолютная устойчивость продольно-поперечной схемы	248
6.4.4. Понятие суммарной аппроксимации	251
Глава 7. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	257
§ 7.1. Разностная схема для нелинейного уравнения	258
7.1.1. Исходная задача и разностная схема. Линеаризованное уравнение для погрешности	258
7.1.2. Оценка погрешности в равномерной метрике	259
7.1.3. Оценка среднеквадратичной нормы погрешности	261

§ 7.2. Итерационные методы решения	262
7.2.1. Метод Ньютона	262
7.2.2. Сходимость итерационного метода Ньютона	263
§ 7.3. Квазилинейное уравнение теплопроводности	265
7.3.1. Исходное уравнение	265
7.3.2. Автомодельные решения	267
7.3.3. Разностные схемы для уравнений с переменными коэффициентами и нелинейного уравнения теплопроводности	271
Глава 8. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	276
§ 8.1. Кусочно линейные восполнения сеточных функций	277
8.1.1. Построение кусочно линейного восполнения	277
8.1.2. Сходимость кусочно линейных восполнений	279
§ 8.2. Понятие о методе конечных элементов	283
8.2.1. Общее описание метода	283
8.2.2. Исходная задача и определение приближенного решения	283
8.2.3. Построение приближенного решения	285
§ 8.3. Исследование сходимости МКЭ	287
8.3.1. Существование приближенного решения	287
8.3.2. Свойства приближенного решения	291
8.3.3. Сходимость приближенного решения к точному	294
§ 8.4. МКЭ для уравнения Пуассона	295
8.4.1. Исходная задача	295
8.4.2. Базисные функции	297
8.4.3. Кусочно линейные восполнения двумерных сеточных функций	299
8.4.4. Построение конечноэлементного решения задачи Дирихле	301
§ 8.5. Сборка в МКЭ	303
8.5.1. Локальные матрицы жесткости	303
8.5.2. Глобальная матрица жесткости	307
ЛИТЕРАТУРА	311
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	313